PRINCIPIA GENERALIA
THEORIAE
FIGVRAE FLVIDORVM
IN STATV AEQVILIBRII

AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

GOTTINGAE,
SVMTIBVS DIETERICHIANIS.
MDCCCXXX.

Vires ascensionem vel depressionem fluidorum in tubis capillaribus gubernantes primus acute et accurate enumerauit sagax Clairaut, sed quum legem virium omnino intactam liquerit, nihil fructus ad explicationem mathematicam phaenomenorum ex illa enumeratione nasci potuit. Attractio vulgaris quadrato distantiae reciproce proportionalis, quae omnes motus coelestes tam felici successu explicat, nullius vsus est nec in phaenomenis capillaribus, nec in phaenomenis adhaesionis et cohaesionis explicandis; calculus enim recte institutus facile docet, ad normam illius legis attractionem cuiusuis corporis, quocum experimenta instituere licet, i. e. cuius moles respectu totius terrae pro nihilo haberi potest, in punctum vbicunque vel adeo in contactu positum, euanescere respectu grauitatis *). Recte hinc concluditur, illam attractionis legem in distantiis minimis naturae haud amplius consentaneam esse, sed modificationem quandam postulare, siue quod eodem redit, corporum particulas praeter illam vim attractiuam exercere aliam in distantiis minimis tantum conspicuam. Phaenomena omnia conspirant ad arguendum, hancce alteram vis attractiuae partem (*attractionem molecularem*), in distantiis vel minimis quas men-

*) Constat, maximam attractionem, quam massa homogenea data in punctum datum secundum illam legem exercere potest, esse ad attractionem, quam eadem massa in figuram sphaericam redacta exercet in punctum in superficie positum, vt 3 ad $\sqrt[3]{25}$: posterior vero attractio cum grauitate facile comparatur.

surare licet insensibilem esse, dum in distantiis insensibilibus partem priorem (quadrato distantiae reciproce proportionalem) longe superare possit.

Ill. Laplace ab hac vnica suppositione circa indolem virium molecularium proficiscens, ceteroqui autem legem diminutionis pro distantiis crescentibus prorsus indeterminatam linquens, primus effectum earum in figuram superficiei fluidorum calculo accurato subiecit, et, stabilita aequatione generali pro figura aequilibrii, non modo phaenomena capillaria proprie sic dicta, sed multa alia his affinia inde explicare conatus est. Hae inuestigationes, per mirum cum experimentis accuratis consensum vbique confirmatae, inter pulcherrima philosophiae naturalis incrementa, quae illi magno geometrae debemus, referendae, obiectiones autem a quibusdam auctoribus contra illas directae ad maximam partem vel leuis vel nullius momenti sunt *).

In calculis ill. Laplace vtique occurrunt quaedam stricto argumentandi modo haud prorsus consentanea. In commentatione priori, *théorie de l'action capillaire*, denotata per φf intensitate attractionis in distantia f, integrale $\int \varphi f . \mathrm{d}f$ ab $f = x$ vsque ad $f = \infty$ extensum statuitur $= \Pi x$; dein integrale $\int \Pi f . f \mathrm{d}f$ ab $f = x$ vsque ad $f = \infty$ extensum, $= \Psi x$; denique valores integralium $2\pi \int \Psi f . \mathrm{d}f$, $2\pi \int \Psi f . f \mathrm{d}f$ ab $f = 0$ vsque ad $f = \infty$ extensorum statuuntur resp. $= K$, et $= H$, denotante π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$. Indoles functionis φf prorsus intacta linquitur, dummodo insensibilis sit pro omnibus valoribus sensibilibus ipsius f. At ex hac *sola* suppositione neutiquam sequeretur, etiam Πf, Ψf pro valoribus sensibilibus ipsius f necessario insensibiles fieri, neque maiori iure, valores integralium $2\pi \int \Psi f . \mathrm{d}f$, $2\pi \int \Psi f . f \mathrm{d}f$ ab $f = 0$ vsque ad valorem sensibilem *finitum* ipsius f extensorum insensibiliter differre a K, H, vti in commentatione illa legitur; infinite multas enim formas functionis φf imaginari liceret, suppo-

*) Ita iudicandum de plerisque obloquutionibus in ephemeridibus Ticinensibus (Giornale di fisica etc. T. 9) prolatis, quibus scite respondit clar. Petit in Annales de chimie et de physique T. 4.

sitioni fundamentali satisfacientes, pro quibus hae conclusiones erroneae forent. Quinadeo, si φf attractionem completam exprimere supponitur, reuera etiam continebit partem formae $\frac{a}{ff}$, a qua attractio vulgaris pendet; sed etiamsi hic terminus pro insensibili habendus sit, dum dimensiones corporum attrahentium, quales in experimentis occurrere possunt, insensibiles sunt prae tota terra, tamen iam secunda integratio, si in infinitum extenderetur, inferret functioni Ψf terminum infinitum.

At si his hisque similibus quaedam leuis incuriae species subesse videtur, certe ad formam disserendi potius quam ad rem ipsam attinet. Apparet enim ex dissertatione secunda, *Supplément à la théorie de l'action capillaire,* ill. Laplace per φf non attractionem completam, sed partem eam tantum quae attractioni vulgari accedit, tacite subintellexisse; posteriorem autem nullam experimentis nostris modificationem sensibilem afferre posse, facile elucet. Quinadeo addigitat, se functionem φf ad instar exponentialis e^{-if} considerare, denotante i quantitatem permagnam, aut potius $\frac{1}{i}$ lineam perparuam. Sed ne opus quidem est, generalitatem tantopere limitare, quum is, qui rem potius quam verba intuetur, facillime videat, sufficere, si integrationes illae non in infinitum, sed tantummodo vsque ad distantiam sensibilem arbitrariam, aut si mauis ad distantiam finitam dimensionibus in experimentis occurrentibus maiorem extendantur.

Alio vero defectu laborat ista theoria longe grauiori, et quem quantum scimus eius cauillatores ne animaduerterunt quidem. Duabus illa partibus constat. Altera stabilit aequationem generalem pro fluidi superficie libera inter differentialia partialia coordinatarum: pendet haec aequatio a vi attractiua moleculari, quam fluidi particulae in se mutuo exercent, atque haec quidem theoriae pars ita absoluta est, vt nihil essentiale desiderandum restet. Sed talis aequatio inter differentialia partialia (cuius integratio, si in analysis potestate esset, functiones arbitrarias adduceret)

1 *

non sufficit ad figuram superficiei *ex asse* determinandam, quod fieri nequit, nisi conditio *noua* accedat indolem figurae in limitibus definiens. Talem conditionem sistit pars altera theoriae, eam scilicet, vt angulus plani superficiem fluidi liberam in confiniis vasis tangentis (siue exactius, in limite vis sensibilis attractiuae parietis vasis) cum plano parietem vasis ibidem tangente *constans* sit, puta per relationem inter intensitates virium molecularium vasis et fluidi determinatus, siquidem continuitas figurae vasis apud confinia superficiei liberae fluidi non interrumpitur. At hancce propositionem cardinalem totius theoriae per calculum demonstrare ne suscepit quidem ill. Laplace; quae enim in dissertatione priori p. 5 huc spectantia afferuntur, argumentationem vagam tantummodo exhibent et quod demonstrandum erat iam supponunt: calculi autem p. 44 sq. suscepti effectu carent. In altera quidem dissertatione ascensus fluidi in tubis capillaribus per methodum aliam tractatur, cuius summa cum methodo priori collata formulam (veram vtique) suppeditat pro angulo illo inter plana tangentia. Sed notare oportet, proprie hic iam *supponi* quod angulus sit constans, praetereaque methodum, per se parum satisfacientem, restringi ad casum maxime specialem, vbi vas prismaticum est, parietesque verticales. His perpensis fateri oportet, theoriam ab ill. Laplace propositam etiamnum essentialiter mancam et incompletam esse.

Resumemus itaque ab integro theoriam figurae aequilibrii fluidorum sub actione grauitatis et virium molecularium propriarum et vasis, in quo negotio methodum prorsus diuersam e primis dynamicae principiis petitam sequemur, maximamque generalitatem statim ab initio amplectemur. Haec disquisitio perducet ad insigne theorema nouum, theoriam completam in vnicam formulam simplicissimam contrahens, e quo vtraque pars theoriae ill. Laplace sponte demanabit.

1.

Ad stabiliendam aequationem aequilibrii systematis punctorum physicorum quotcunque, quorum motus conditionibus qualibuscunque adstringuntur, maxime idoneum est principium motuum virtualium, quod sic enunciamus.

Constet systema e punctis physicis m, m', m'' etc., in quibus massae per easdem literas denotandae concentratae concipiantur. Sit P vna e viribus acceleratricibus in punctum m agentibus, et dum systemati motus qualiscunque infinite paruus cum conditionibus systematis sociabilis (motus virtualis) tribui fingitur, sit $\mathrm{d}p$ motus puncti m in directionem vis P proiectus, i. e. per cosinum anguli quem facit cum directione vis P multiplicatus; denique sit $\Sigma P\,\mathrm{d}p$ aggregatum omnium similium productorum respectu omnium virium punctum m sollicitantium. Perinde repraesentet P' indefinite vires punctum m' sollicitantes, atque $\mathrm{d}p'$ motus puncti m' ad singularum directiones proiectos, similiterque de reliquis punctis. Quibus ita intellectis, conditio aequilibrii systematis consistit in eo, vt aggregatum.

$$m\Sigma P\,\mathrm{d}p + m'\Sigma P'\,\mathrm{d}p' + m''\Sigma P''\,\mathrm{d}p'' + \text{etc.}$$

pro quocunque motu virtuali fiat $= 0$, vti principium motuum virtualium vulgo exprimitur, vel accuratius, in eo, vt illud aggregatum pro nullo motu virtuali adipisci possit valorem positiuum.

2.

Vires hic considerandae ad tria capita reducuntur.

I. Grauitas, cuius intensitatem pro singulis punctis eandem, directiones parallelas supponere licet: illam denotabimus per g.

[illegible] attractiones, quas puncta m, m', m'' etc. a se mutuo experiuntur [illegible] attractionis functioni distantiae proportionalis siue pro- [illegible] huius functionis per characteristicam f denotandae in massam in [illegible] attrahente concentratam aequalis supponitur.

III. Vires quibus puncta m, m', m'' etc. ad puncta quotcunque fixa attrahuntur. Pro his viribus simili modo characteristica F distantiae praefigenda vtemur, et per M, M', M'' etc. tum puncta fixa, tum massas quae in ipsis concentratae supponuntur, designabimus.

Quodsi iam distantiam inter bina puncta m, m' per hoc signum denotamus (m, m'), et perinde per (m, M) distantiam inter puncta m, M etc., nec non per z, z', z'' etc. altitudines punctorum m, m', m'' etc. supra planum horizontale arbitrarium H, has partes complexus $\Sigma P \mathrm{d}p$ habebimus:

$$-g\,\mathrm{d}z$$

$$-m'f(m,m')\,\mathrm{d}(m,m')-m''f(m,m'')\,\mathrm{d}(m,m'')-m'''f(m,m''')\,\mathrm{d}(m,m''')\text{ etc.}$$

$$-MF(m,M)\,\mathrm{d}(m,M)-M'F(m,M')\,\mathrm{d}(m,M')-M''F(m,M'')\,\mathrm{d}(m,M'')\text{ etc.}$$

vbi differentialia $\mathrm{d}(m, m')$, $\mathrm{d}(m, m'')$ etc. sunt partialia, vtpote ad solum motum virtualem puncti m relatae.

Jam introducamus loco functionis f eam, per cuius differentiationem oritur, puta statuatur $-fx.\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi x$, siue $\int fx.\mathrm{d}x = -\varphi x$. Constans integrationis ad lubitum eligi potest; si placet (et si res fert), ita determinetur vt fiat $\varphi\infty = 0$, in quo casu φt exhibebit integrale $\int fx.\mathrm{d}x$ ab $x = t$ vsque ad $x = \infty$ extensum. Prorsus simili modo loco functionis F introducatur alia Φ talis vt habeatur $-Fx.\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Phi x$. Ita complexus $\Sigma P\mathrm{d}p$ fit $=$

$$-g\,\mathrm{d}z$$

$$+m'\mathrm{d}\varphi(m,m')+m''\mathrm{d}\varphi(m,m'')+m'''\mathrm{d}\varphi(m,m''')+\text{etc.}$$

$$+M\mathrm{d}\Phi(m,M)+M'\mathrm{d}\Phi(m,M')+M''\mathrm{d}\Phi(m,M'')+\text{etc.}$$

vbi notandum, differentialia in linea secunda esse partialia ad solum motum puncti m relata.

At manifesto quoduis harum differentialium partialium habet supplementum suum in alio complexu. Ita tum complexus $m\Sigma P\mathrm{d}p$ tum com-

plexus $m'\Sigma P'\mathrm{d}p'$ continet differentiale partiale $mm'\mathrm{d}\varphi(m,m')$, sed quod in priori refertur ad solum motum ipsius m, in posteriori ad solum motum ipsius m'. Hinc patet, aggregatum in art. 1 prolatum reuera esse differentiale completum, et quidem $= \mathrm{d}\Omega$, si statuatur $\Omega =$

$$\begin{aligned}
&- gmz - gm'z' - gm''z'' - \text{etc.}\\
&+ mm'\varphi(m,m') + mm''\varphi(m,m'') + mm'''\varphi(m,m''') + \text{etc.}\\
&\qquad + m'm''\varphi(m',m'') + m'm'''\varphi(m',m''') + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad + m''m'''\varphi(m'',m''') + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad + \text{etc.}\\
&+ mM\Phi(m,M) + mM'\Phi(m,M') + mM''\Phi(m,M'') + \text{etc.}\\
&+ m'M\Phi(m',M) + m'M'\Phi(m',M') + m'M''\Phi(m',M'') + \text{etc.}\\
&+ m''M\Phi(m'',M) + m''M'\Phi(m'',M') + m''M''\Phi(m'',M'') + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Conditio aequilibrii itaque in eo consistit, vt valor functionis Ω per nullum motum virtualem accipere possit incrementum positiuum, siue quod idem est, *vt Ω sit maximum.*

Functionem Ω etiam sequenti modo exhibere licet:

$$\begin{aligned}
\Omega = \Sigma m\{&-gz + \tfrac{1}{2}m'\varphi(m,m') + \tfrac{1}{2}m''\varphi(m,m'') + \tfrac{1}{2}m'''\varphi(m,m''') + \text{etc.}\\
&+ M\Phi(m,M) + M'\Phi(m,M') + M''\Phi(m,M'') + \text{etc.}\}
\end{aligned}$$

vbi characteristica Σ repraesentat aggregatum expressionis adscriptae cum omnibus in quas transit, dum deinceps m cum m', m'', m''' etc. permutatur.

3.

Si loco punctorum discretorum M, M', M'' etc. assumimus corpus continuum explens spatium S densitate vniformi $= C$, aggregatum

$$M\Phi(m,M) + M'\Phi(m,M') + M''\Phi(m,M'') + \text{etc.}$$

transibit in integrale $C\int \mathrm{d}S\,.\,\Phi(m,\mathrm{d}S)$ per totum spatium S extendendum, denotando secundum analogiam per $(m,\mathrm{d}S)$ distantiam puncti m a quovis spatii S elemento $\mathrm{d}S$.

At si insuper loco punctorum discretorum m, m', m'' etc. corpus continuum, spatium s densitate vniformi $= c$ explens, considerandum est,

computus ipsius Ω integrationem duplicem requiret, atque ita perficiendus erit, vt primo pro puncto indefinito μ eruatur valor expressionis

$$-gz + \tfrac{1}{2}c\int \mathrm{d}s.\varphi(\mu, \mathrm{d}s) + C\int \mathrm{d}S.\Phi(\mu, \mathrm{d}S)$$

vbi z est altitudo puncti μ supra planum H, atque integrale primum per totum spatium s, secundum per totum spatium S extendendum est. Qui valor, a solo loco puncti μ pendens, si per $[\mu]$ denotatur, erit

$$\Omega = c\int \mathrm{d}s.[\mathrm{d}s],$$

integratione per totum spatium s extensa.

Breuius hoc ita exprimitur:

$$\Omega = -gc\int z\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}cc\int\int \mathrm{d}s.\mathrm{d}s'.\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}s') + cC\int\int \mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\Phi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$$

vbi s, s' proprie denotant vnum idemque spatium (a corpore mobili expletum), sed bis in elementa sua pro duplici integratione resoluendum.

4.

Corporum fluidorum indoles characteristica consistit in perfecta mobilitate vel minimarum partium, ita vt figuram quamlibet induere possint, et vel minimae potentiae, figuram mutare nitenti, cedant. In fluidis inexpansibilibus (liquidis), quibus nostra disquisitio dicata est, volumen cuiusuis particulae constans manere debet pro omnibus figurae mutationibus. Considerando itaque corpus fluidum, cuius motus per corpus immobile solidum (vas) limitatur, et in cuius particulas praeter grauitatem agere supponimus tum attractionem partium mutuam, tum attractionem partium vasis, status aequilibrii poscet, vt valor ipsius Ω sit maximum, i. e. vt nulla transpositio infinite parua partium fluidi ipsi Ω incrementum positiuum inducere possit. Quapropter quum manifesto valor ipsius Ω eatenus tantum mutari possit, quatenus figura spatii, quod totum fluidum implet, mutatur (neque vero per solum motum fluidi internum), aequilibrium aderit, quoties Ω pro nulla illius figurae mutatione infinite parua cum figura vasis conciliabili, manente volumine constante, augmentum capere potest. Sponte hinc sequitur, si figura omnino nullam mutationem assumere possit (vase fluidum vndique cingente et tangente), vires illas in

fluidum agentes motum internum fluidi producere non posse, sed sibi aequilibrium facere.

5.

Progredimur ad accuratiorem inuestigationem expressionis Ω, quae tamquam fundamentum theoriae aequilibrii fluidorum considerari debet. Incipiendo a termino primo, sponte patet, $\int z\,\mathrm{d}s$ exhibere productum e volumine spatii s in altitudinem centri grauitatis eius supra planum H, adeoque $c\int z\,\mathrm{d}s$ productum massae, $gc\int z\,\mathrm{d}s$ productum ponderis fluidi in eandem altitudinem. Quodsi itaque partes fluidi praeter grauitatem alii vi non essent obnoxiae, altitudo centri grauitatis in statu aequilibrii esse deberet quam minima, vnde facile colligitur, superficiei partem liberam, seu partes liberas, in vno eodemque plano horizontali esse debere, fluidum superne limitante.

6.

Euolutio termini secundi et tertii refertur ad duos casus particulares problematis generalis, vbi, propositis duobus spatiis quibuscunque, singula elementa primi spatii cum singulis elementis secundi combinari, et producta e ternis factoribus, puta e volumine elementi spatii primi, volumine elementi spatii secundi, et functione data distantiae mutuae, in summam colligi debent. Terminus secundus refertur ad casum eum, vbi ambo spatia identica sunt, tertius ad eum, vbi alterum spatium totum est extra alterum: problema completum duos alios casus complectitur, scilicet vbi vel alterum spatium est pars alterius, vel alterum cum altero partem communem habet. Quamquam vero tum duo priores casus ad institutum nostrum sufficere, tum duo reliqui ad illos facile reduci possent, tamen operae pretium erit, problema per se satis insigne generalitate completa amplecti. Spatia in hac disquisitione generali per s, S, functionem distantiae per characteristicam φ denotabimus, ita vt in applicatione ad terminum secundum loco ipsius S ipsum spatium s, in applicatione ad termi-

num tertium loco functionis φ ipsam Φ substituere oporteat. Agitur itaque de integrali

$$\int\int \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\varphi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}S)$$

quod speciem quidem prae se fert integrationis duplicis, sed reuera, quum vtriusque spatii elementa a ternis variabilibus pendeant, integrationem sextuplicem implicat, quam iam ad integrationem quadruplicem reducere docebimus.

7.

Initium facimus ab euolutione integralis $\int \mathrm{d}s\,.\,\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$ per omnes partes spatii s extendendi, denotante μ punctum determinatum vel extra vel intra spatium s situm. Concipiatur superficies sphaerica radio $= 1$ circa centrum μ descripta, atque in elementa infinite parua diuisa; sit $\mathrm{d}\Pi$ tale elementum, secetque recta a μ versus punctum huius elementi ducta superficiem spatii s deinceps in punctis p', p'', p''' etc., quorum multitudo par erit vel impar, prout μ extra vel intra spatium s iacet; distantias $\mu p'$, $\mu p''$, $\mu p'''$ etc. denotabimus per r', r'', r''' etc. Ducantur porro rectae a μ versus singula puncta peripheriae elementi $\mathrm{d}\Pi$, quo pacto formabitur spatium pyramidale, atque exsecabuntur e superficie spatii s, apud puncta p', p'', p''' etc., elementa resp. per $\mathrm{d}t'$, $\mathrm{d}t''$, $\mathrm{d}t'''$ etc. denotanda. Denique sit q' angulus inter rectam $p'\mu$ atque normalem in elementum $\mathrm{d}t'$ extrorsum ductam; et perinde sint q'', q''' etc. inclinationes similium normalium apud puncta p'', p''' etc. ad rectam versus μ ductam. Ita manifesto erit

$$\mathrm{d}\Pi = \pm \frac{\mathrm{d}t'.\cos q'}{r'r'} = \mp \frac{\mathrm{d}t''.\cos q''}{r''r''} = \pm \frac{\mathrm{d}t'''.\cos q'''}{r'''r'''} \text{ etc.}$$

valentibus signis superioribus vel inferioribus, prout μ est extra vel intra spatium s.

Porro patet, integrale $\int \mathrm{d}s\,.\,\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$ pro spatii s partibus intra spatium illud pyramidale contentis haberi per integrale $\mathrm{d}\Pi\,.\int rr\varphi r\,.\,\mathrm{d}r$ extensum ab $r = r'$ vsque ad $r = r''$, dein ab $r = r'''$ vsque ad $r = r''''$ etc., si μ iaceat extra spatium s, vel extensum ab $r = 0$ vsque ad $r = r'$,

dein ab $r = r''$ vsque ad $r = r'''$ etc., si μ iaceat intra spatium s. Quodsi itaque statuimus indefinite.

$$\int rr\varphi r.\mathrm{d}r = -\psi r\ ,$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale $\int \mathrm{d}s.\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$, quatenus extenditur ad partes spatii s intra spatium illud pyramidale sitas, erit $= \mathrm{d}\Pi.(\psi r' - \psi r'' + \psi r''' - \text{etc.})$

$$= \frac{\mathrm{d}t'.\cos q'.\psi r'}{r'r'} + \frac{\mathrm{d}t''.\cos q''.\psi r''}{r''r''} + \frac{\mathrm{d}t'''.\cos q'''.\psi r'''}{r'''r'''} + \text{etc.}$$

quoties μ iacet extra spatium s; sed $= \mathrm{d}\Pi.(\psi 0 - \psi r' + \psi r'' - \psi r''' + \text{etc.})$

$$= \mathrm{d}\Pi.\psi 0 + \frac{\mathrm{d}t'.\cos q'.\psi r'}{r'r'} + \frac{\mathrm{d}t''.\cos q''.\psi r''}{r''r''} + \frac{\mathrm{d}t'''.\cos q'''.\psi r'''}{r'''r'''} + \text{etc.}$$

quoties μ iacet intra spatium s.

Jam si haec summatio per omnes superficiei sphaericae partes colligitur, integrale $\int \mathrm{d}s.\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$ completum fit

in casu priori $= \int \frac{\mathrm{d}t.\cos q.\psi r}{rr}$

in casu posteriori $= 4\pi\psi 0 + \int \frac{\mathrm{d}t.\cos q.\psi r}{rr}$

denotando per $\mathrm{d}t$ indefinite omnia elementa superficiei spatii s, atque per q, r eorum respectu eadem, quae antea per literas accentuatas respectu elementorum determinatorum expressa sunt, denique per π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$.

Ceterum facile perspicitur, si punctum μ esset neque extra spatium s neque intra, sed in ipsa eius superficie, valere formulam secundam, mutato factore 4π in 2π, siquidem superficies in puncto μ neque cuspidem neque aciem offerat; sed ad propositum nostrum haud necessarium est, ad hunc casum attendere.

8.

Per disquisitionem art. praec. euolutio integralis $\int\int \mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$ reducitur ad

$$4\pi\sigma\psi 0 + \iint \mathrm{d}t\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\frac{\cos q\,.\,\psi(\mathrm{d}t,\mathrm{d}S)}{(\mathrm{d}t,\mathrm{d}S)^2}$$

si per σ denotamus volumen eius spatii, quod vtrique spatio s, S commune est, ita vt prior pars $4\pi\sigma\psi 0$ excidat, si spatia s, S se inuicem excludunt. Restat integrale nouum, specie etiamnum duplex, reuera quintuplex. Quod vt ad quadruplex reducamus, considerabimus integrale

$$\int \mathrm{d}S\,.\,\frac{\cos q\,.\,\psi(\mu,\mathrm{d}S)}{(\mu,\mathrm{d}S)^2}$$

per omnia elementa spatii S extendendum, denotante iterum μ punctum determinatum, atque q angulum inter duas rectas ab hoc puncto proficiscentes, alteram versus elementum $\mathrm{d}S$, alteram fixam. Hoc integrale, specie simplex, reuera triplex, iam ad aliud integrale reuera duplex reducere docebimus, et quidem duobus modis prorsus diuersis.

Planum per punctum μ illi rectae fixae normale, per Π denotandum, quatenus per proiectionem spatii S attingitur, in elementa infinite parua $\mathrm{d}\Pi$ diuisum esse concipiatur. Per punctum talis elementi $\mathrm{d}\Pi$ ducatur recta plano Π normalis, quae deinceps, i. e. progrediendo in directione rectae fixae parallela, secet superficiem spatii S in punctis P', P'', P''' etc., quorum distantiae a puncto μ sint resp. R', R'', R''' etc. Similes rectae per omnia puncta peripheriae elementi $\mathrm{d}\Pi$, plano ad angulos rectos, ductae, spatium prismaticum formabunt, et apud puncta P', P'', P''' etc. e superficie spatii S elementa exsecabunt, quae per $\mathrm{d}T'$, $\mathrm{d}T''$, $\mathrm{d}T'''$ etc. denotamus. Denique sit χ' angulus inter duas rectas a puncto P' proficiscentes, alteram extrorsum elemento $\mathrm{d}T'$ normalem, alteram rectae fixae parallelam, similesque angulos apud puncta P'', P''' etc. exprimant characteres χ'', χ''' etc. Ita manifesto erit

$$\mathrm{d}\Pi = -\mathrm{d}T'.\cos\chi' = +\mathrm{d}T''.\cos\chi'' = -\mathrm{d}T'''.\cos\chi''' \text{ etc.}$$

Spatium prismaticum in elementa infinite parua $\mathrm{d}\Pi\,.\,\mathrm{d}z$ diuidatur, denotante z distantiam puncti indefiniti a plano Π (positiue acceptam ab ea parte, a qua est recta fixa); si itaque eiusdem puncti distantiam a puncto μ per r designamus, erit $z = r\cos q$, nec non (quoniam $rr - zz$ constans est) $z\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r$, siue $\mathrm{d}\Pi\,.\,\mathrm{d}z\,.\cos q = \mathrm{d}\Pi\,.\,\mathrm{d}r$. Hinc colligitur,

integrale nostrum $\int \mathrm{d}S.\frac{\cos q.\psi(\mu,\mathrm{d}S)}{(\mu,\mathrm{d}S)^2}$, extensum per eas spatii S partes, quae in spatio isto prismatico continentur, obtineri per integrale $\mathrm{d}\Pi.\int\frac{\mathrm{d}r.\psi r}{rr}$, si extendatur ab $r=R'$ vsque ad $r=R''$, dein ab $r=R'''$ vsque ad $r=R''''$ etc. Quodsi itaque indefinite statuimus

$$\int\frac{\mathrm{d}r.\psi r}{rr}=-\vartheta r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale nostrum pro partibus spatii S intra spatium prismaticum sitis erit

$$=\mathrm{d}\Pi.(\vartheta R'-\vartheta R''+\vartheta R'''-\text{etc.})$$

$$=-\mathrm{d}T'.\cos\chi'.\vartheta R'-\mathrm{d}T''.\cos\chi''.\vartheta R''-\mathrm{d}T'''.\cos\chi'''.\vartheta R'''-\text{etc.}$$

Collectis his summationibus per prismata omnibus elementis $\mathrm{d}\Pi$ respondentia, manifesto omnia elementa superficiei spatii S exhausta erunt, habebimusque completum integrale

$$\int\mathrm{d}S.\frac{\cos q.\psi(\mu,\mathrm{d}S)}{(\mu,\mathrm{d}S)^2}=-\int\mathrm{d}T.\cos\chi.\vartheta R$$

denotante $\mathrm{d}T$ indefinite quoduis elementum superficiei spatii S, R eius distantiam a puncto μ, atque χ angulum inter normalem ad elementum $\mathrm{d}T$ extrorsum directam atque rectam rectae fixae parallelam.

Hoc itaque modo integrale $\iint\mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\varphi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}S)$ reductum est ad formam

$$4\pi\sigma\psi 0-\iint\mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos\chi.\vartheta(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)$$

vbi manifesto χ indicat inclinationem mutuam elementorum $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}T$, mensuratam per inclinationem normalium vtriuque extrorsum respectu spatiorum s, S ductarum, integrationesque per superficies completas vtriusque spatii extendi debent.

9.

Sicuti methodus praecedens diuisioni spatii S in elementa prismatica innixa est, ita methodus secunda a diuisione eiusdem spatii in elementa pyramidalia petetur. Concipiatur superficies sphaerica radio $=1$ circa

centrum μ descripta atque in elementa infinite parua diuisa. Versus punctum talis elementi $\mathrm{d}\Pi$ ducatur a puncto μ recta, quae superficiem spatii S secet deinceps in punctis P', P'', P''' etc.; distantiae horum punctorum a μ denotentur per R', R'', R''' etc. Rectae a μ versus omnia puncta peripheriae elementi $\mathrm{d}\Pi$ ductae formabunt spatium pyramidale, et apud puncta P', P'', P''' etc. e superficie spatii S elementa exsecabunt, quae per $\mathrm{d}T'$, $\mathrm{d}T''$, $\mathrm{d}T'''$ etc. designamus. Denique sit Q' angulus inter rectam $P'\mu$ atque normalem in elementum $\mathrm{d}T'$ extrorsum ductam, et perinde sint Q'', Q''' etc. inclinationes similium normalium apud puncta P'', P''' etc. ad rectam versus μ ductam. Ita erit

$$\mathrm{d}\Pi = \pm \frac{\mathrm{d}T'.\cos Q'}{R'R'} = \mp \frac{\mathrm{d}T''.\cos Q''}{R''R''} = \pm \frac{\mathrm{d}T'''.\cos Q'''}{R'''R'''} \text{ etc.}$$

valentibus signis superioribus vel inferioribus, prout μ est extra vel intra spatium S: casus, vbi μ est in ipsa superficie spatii S, adnumerandus est casui priori vel posteriori, prout linea $\mu P'$ extra vel intra spatium S cadit.

Porro patet, pro omnibus partibus spatii S intra illud spatium pyramidale sitis angulum q constantem esse, similique proin modo vt in art 7 deducimus, si statuatur indefinite

$$\int \psi r.\mathrm{d}r = -\theta r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale

$$\int \frac{\mathrm{d}S.\cos q.\psi(\mu, \mathrm{d}S)}{(\mu, \mathrm{d}S)^2}$$

extensum per omnes partes spatii S intra illud spatium pyramidale sitas, fore in casu priori

$$= \cos q.\left(\frac{\mathrm{d}T'.\cos Q'.\theta R'}{R'R'} + \frac{\mathrm{d}T''.\cos Q''.\theta R''}{R''R''} + \frac{\mathrm{d}T'''.\cos Q'''.\theta R'''}{R'''R'''} + \text{etc.}\right),$$

in posteriori vero eidem formulae adiiciendum esse terminum $\mathrm{d}\Pi.\cos q.\theta 0$.

Jam si haec summatio per omnia superficiei sphaericae elementa colligitur, integrale completum

$$\int \frac{\mathrm{d}S.\cos q.\psi(\mu, \mathrm{d}S)}{(\mu, \mathrm{d}S)^2}$$

fiet

I. in casu eo, vbi punctum μ est extra spatium S,

$$= \int \frac{\mathrm{d}\,T . \cos q . \cos Q . \theta R}{RR}$$

denotante dT indefinite omnia elementa superficiei spatii S, atque Q, R illorum respectu eadem, quae antea per literas accentuatas respectu elementorum determinatorum expressa sunt, denique q inclinationem rectae a puncto μ versus elementum dT ductae ad rectam nostram fixam.

II. In casu eo, vbi punctum μ est intra spatium S, adiici debet terminus

$$\theta 0 . \int \mathrm{d}\,\Pi . \cos q$$

vbi q est inclinatio rectae a μ versus dΠ ductae ad rectam fixam, integratioque per totam superficiem sphaericam extendi debet. Sed facile perspicietur, integrale istud, extensum per hemisphaerium id, pro quo q acutus est, fieri $= + \pi$, per hemisphaerium alterum autem $= - \pi$; quapropter integrale completum euanescit, valetque pro hoc casu secundo pure eadem formula, quam pro primo tradidimus. Sed aliter se habet res in casu tertio

III. quoties punctum μ est in superficie ipsa spatii S. Scilicet hic quoque adiiciendus est terminus

$$\theta 0 . \int \mathrm{d}\,\Pi . \cos q$$

sed integratione per eas tantummodo superficiei sphaericae partes extensa, pro quibus pars initialis rectae a μ versus dΠ ductae cadit intra spatium S, siue (siquidem superficies spatii S in puncto μ neque cuspidem neque aciem offert) pro quibus haec recta facit angulum obtusum cum recta superficiei spatii S in puncto μ normali extrorsumque ducta. Superest itaque, vt integrale hoc sensu acceptum eruamus.

Secent haec normalis atque recta fixa superficiem sphaericam resp. in punctis G, H, statuatur arcus $GH = k$, arcus autem inter G et punctum indefinitum superficiei sphaericae $= v$; denique sit w angulus sphaericus inter arcus k, v. Ita erit $\cos q = \cos k . \cos v +$

$\sin k . \sin v . \cos w$, et pro $d\Pi$ accipiendum erit elementum $\sin v . dv . dw$. Integrale autem $\int d\Pi . \cos q$

$$= \int\int (\cos k . \cos v + \sin k . \sin v . \cos w) \sin v . dv . dw$$

extendi debet a $w = 0$ vsque ad $w = 360°$, atque a $v = 90°$ vsque ad $v = 180°$. Hoc pacto integratio prior suppeditat

$$\int 2\pi \cos k . \cos v . \sin v . dv$$

ac dein posterior $-\pi \cos k$.

Ad propositum nostrum hic casus tertius eatenus tantum in considerationem venit, quatenus superficies spatiorum s, S partem quandam finitam communem habent, in qua si punctum μ reperitur, erit vel $k = 0$ vel $= 180°$, adeoque integrale $\int d\Pi . \cos q$ vel $= -\pi$ vel $= +\pi$, prout scilicet apud punctum μ spatia s, S sunt vel in eadem plaga vel in plagis oppositis respectu plani vtramque superficiem tangentis.

Applicando haec ad integrale nostrum primarium $\int\int ds . dS . \varphi(ds, dS)$, huius valor fit

I. quoties superficies spatiorum s, S nullam partem finitam communem habent,

$$= 4\pi\sigma\psi 0 + \int\int \frac{dt . dT . \cos q . \cos Q . \theta(dt, dT)}{(dt, dT)^2}$$

II. quoties superficies spatiorum s, S partem finitam $= \mathfrak{T}$ communem habent,

$$= 4\pi\sigma\psi 0 \mp \pi\mathfrak{T}\theta 0 + \int\int \frac{dt . dT . \cos q . \cos Q . \theta(dt, dT)}{(dt, dT)^2}$$

vbi signum superius vel inferius valet, prout spatia s, S sunt ab eadem plaga vel a plagis oppositis respectu superficiei communis $\mathfrak{T}$.

III. Quoties superficies spatiorum s, S plures partes finitas discretas communes habent, sit $\mathfrak{T}$ summa earum, quibus spatia s, S ab eadem plaga adiacent, $\mathfrak{T}'$ summa earum, quibus haec spatia a plagis oppositis contigua sunt, eritque integrale nostrum

$$= 4\pi\sigma\psi 0 \pm \pi(\mathfrak{T}' - \mathfrak{T})\theta 0 + \int\int \frac{dt . dT . \cos q . \cos Q . \theta(dt, dT)}{(dt, dT)^2}$$

Haec tertia formula omnes casus complecti censeri potest. Integrale duplex per omnia elementa vtriusque superficiei extendi debet, denotantque q, Q angulos, quos facit recta bina elementa $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}T$ iungens cum normalibus in haec elementa extrorsum ductis, directione illius rectae illinc a $\mathrm{d}t$ versus $\mathrm{d}T$, hinc a $\mathrm{d}T$ versus $\mathrm{d}t$ accepta.

10.

Duae transformationes integralis $\int \mathrm{d}s \,.\, \mathrm{d}S \,.\, \varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$ in artt. 8 et 9 euolutae aequali fere concinnitate se commendant, proposito autem nostro posterior magis accommodata est. Problema generale vlterius reduci nequit, nisi ad suppositiones determinatas vel circa spatia s, S, vel circa functionem φ descendamus. Et quum functio φ originem trahat a functione f, disquisitionem vlteriorem iam superstruemus eidem hypothesi, a qua ill. Laplace profectus est, puta vires attractiuas moleculares in distantiis insensibilibus tantum sensibiles esse. Cui phrasi quum aliquid vagi inhaereat, quamdiu non assignatur vnitas, ante omnia obseruamus, vim attractiuam fr, per functionem distantiae r expressam, vt cum grauitate g homogenea euadat, antea per massam aliquam multiplicari debere; iam mens illius suppositionis ea est, vt denotante M massam aliquam, qualis in experimentis occurrere potest, puta quam respectu totius terrae pro nihilo habere licet, Mfr semper maneat insensibilis respectu grauitatis, quamdiu r valorem mensuris nostris sensibilem quantumuis paruum habet, dum nihil impediat, quominus valor ipsius Mfr in distantiis insensibilibus non solum sensibilis fieri, sed adeo, decrescente ipsa r, omnes limites superare possit. Haud sane sine admiratione deprehendimus, quam grauia ex hac sola hypothesi, dum ceteroquin lex functionis fr tamquam omnino incognita spectatur, eruere liceat, characterem mathematicum prorsus peculiarem prae se ferentia: dum scilicet rebus sic stantibus praecisionem mathematicam absolutam sibi vindicare nequeunt, tamen tantam certissime praecisionem tuentur, vt per nullum experimentum vlla aberratio a veritate absoluta reperiri possit; quamprimum enim

successisset, talem aberrationem vlli mensurationi subiicere, suppositio ipsa cessaret.

11.

Supponere licebit, functionem fr (et perinde functionem Fr) attractionem denotare omissa ea parte, quae ipsi rr reciproce proportionalis phaenomenis astronomicis explicandis inseruit; haec enim pars, quaecunque sit figura fluidi et vasis, in quouis puncto insensibilem tantummodo modificationem grauitati afferre valet. Crescente itaque r a valore sensibili in infinitum, fr non modo per se insensibilis erit, sed etiam citius decrescet quam $\frac{1}{rr}$. Hinc facile colligitur, etiam integrale $\int fr.\mathrm{d}r$ a valore quocunque sensibili in infinitum extensum insensibile esse, quapropter constantem integrationis $\int fr.\mathrm{d}r = -\varphi r$ ita acceptam supponemus, vt habeatur $\varphi\infty = 0$, siue vt sit φr ipse valor integralis $\int fx.\mathrm{d}x$ ab $x = r$ vsque ad $x = \infty$ extensus. Hoc pacto φr pro qualibet distantia r denotat quantitatem positiuam, sed insensibilem quamdiu r sensibilis est; contra pro valore insensibili ipsius r non solum sensibilis esse, sed adeo, continuo decrescente distantia r, omnes limites superare poterit, siue secundum vulgarem loquendi modum nihil obstat, quominus sit $\varphi 0 = \infty$.

12.

Inde quod functio φr pro quouis valore sensibili ipsius r insensibilis est, et crescente r continuo decrescit, statim quidem sequitur, integrale $\int rr\varphi r.\mathrm{d}r$ a valore aliquo sensibili vsque ad alium maiorem extensum etiamnum insensibile manere, dummodo posterior sit intra ambitum eorum, circa quos experimenta instituere licet: sed neutiquam ex illa proprietate sola concludere fas esset, integrale insensibile manere, ad quantumuis magnum interuallum integratio extendatur. Calculi ill. Laplace ita quidem pronunciati sunt, vt talem suppositionem inuoluant; at dum natura functionis φr incognita est, consultius videtur, ab omnibus suppositionibus hypotheticis, quibus supersedere possumus, abstinere. Quum ita-

que constans integrationis $\int r\,r\,\varphi r . \mathrm{d}r = -\psi r$ arbitrio relicta sit, sufficiat nobis, eam ita electam supponere, vt fiat $\psi r = 0$ pro valore aliquo sensibili ipsius r arbitrario, sed intra ambitum dimensionum corporum, circae quae experimenta instituere licet. Hoc pacto ψr pro quouis alio eiusmodi valore semper insensibilis erit (positiua pro minori, negatiua pro maiori), sed nihil hinc obstat, quominus pro valore insensibili ipsius r sensibilis euadere possit: addere tamen oportet, phaenomenorum explicationem postulare, vt decrescente distantia r in infinitum, valor ipsius ψr semper maneat finitus, siue vt $\psi 0$ sit quantitas finita. Ceterum manifesto $\frac{c\psi r}{r}$ est quantitas cum grauitate g homogenea, siue $\frac{c\psi r}{g}$ linea, adeoque $\frac{c\psi 0}{g}$ linea determinata (pro natura corporum, ad quorum vires attractiuas functio fr refertur), cuius magnitudinem ingentem suspicari quidem licet, sed quam in casibus determinatis vix approximatiue assignare valemus, saltem non absque suppositionibus hypotheticis *)

13.

Prorsus simili modo in integratione $\int \psi r . \mathrm{d}r = -\theta r$ constantem ita electam supponimus, vt fiat $\theta r = 0$ pro valore arbitrario ipsius r intra ambitum eorum, pro quibus experimenta instituere licet, quo pacto

---

*) Concessa explicatione phaenomenorum lucis in systemate emanationis, refractio pendet ab attractione particularum corporis pellucidi in particulas lucis moleculari, ratioque refractionis a valore ipsius $\psi 0$, ita quidem vt habeatur

$$\frac{c\psi 0}{g} = \frac{(nn-1)kk}{8\pi^3 l}$$

denotante l longitudinem penduli per minutum secundum vibrantis, k motum luminis in vacuo intra minutum secundum, n rationem sinus anguli incidentiae ad sinum anguli refracti: hoc pacto pro aqua fit $\frac{c\psi 0}{g}$ bis millies maior quam distantia media solis a terra.

θr insensibilis erit pro quouis eiusmodi valore sensibili ipsius r, etiamsi sensibilis euadere possit pro valore insensibili. Manifesto $\frac{c\theta r}{g}$ exprimit aream figurae duarum dimensionum, adeoque $\frac{\theta r}{\psi r}$ lineam. Necessario autem $\frac{\theta 0}{\psi 0}$ est linea magnitudinis insensibilis, quod ita demonstramus. Quum ψr inde a $r = 0$ continuo decrescat, et quidem tam cito, vt iam insensibilis euaserit, quamprimum r valorem sensibilem acquisiuit, valor ipsius r, pro quo fit $\psi r = \frac{1}{2}\psi 0$, insensibilis esse debet: denotetur ille per ϱ. Consideremus integrale $\int(\psi 0 - \psi r)\,\mathrm{d}r$, quod ab $r = 0$ vsque ad $r = R$ extensum fit $= R\psi 0 - \theta 0 + \theta R$. Manifesto hoc integrale maius erit, quam idem integrale ab $r = \varrho$ vsque ad $r = R$ extensum, atque hoc iterum maius, quam integrale $\int(\psi 0 - \psi\varrho)\,\mathrm{d}r$ inter eosdem limites. Quare quum integrale postremum fiat $= (\psi 0 - \psi\varrho)(R - \varrho) = \frac{1}{2}\psi 0.(R - \varrho)$, erit generaliter pro quouis valore ipsius R (maiori quam ϱ)

$$R\psi 0 - \theta 0 + \theta R > \tfrac{1}{2}\psi 0.(R - \varrho)$$

Jam si R denotare supponitur valorem fractionis $\frac{\theta 0}{\psi 0}$, haec relatio suppeditat

$$\theta R > \tfrac{1}{2}\psi 0.(R - \varrho)$$

quod foret absurdum, si R esset quantitas sensibilis.

Non obstante itaque ingente magnitudine ipsius $\psi 0$, nihil impedit, quominus $\theta 0$ esse possit quantitas satis modica et cum dimensionibus corporum experimentis subiectorum comparabilis.

14.

Superest vt quae ex hac indole functionis θ respectu integralis (I)

$$\iint \frac{\mathrm{d}t\,.\,\mathrm{d}T.\cos q\,.\cos Q\,.\,\theta(\mathrm{d}t,\,\mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t,\,\mathrm{d}T)^2}$$

sequuntur perscrutemur. Haec inuestigatio inchoare debet a simpliciori, dum in alterutra superficie punctum determinatum μ consideramus atque integrale (II)

$$\int \frac{\mathrm{d}t \,.\, \cos q \,.\, \cos Q \,.\, \theta(\mu, \mathrm{d}t)}{(\mu, \mathrm{d}t)^2}$$

per totam superficiem t extendendum euoluimus. Denotant hic Q angulum inter duas rectas a puncto μ proficiscentes, alteram versus elementum $\mathrm{d}t$, alteram fixam; q vero angulum inter duas rectas a puncto elementi $\mathrm{d}t$ proficiscentes, alteram versus punctum μ, alteram elemento normalem extrorsumque directam.

Primo loco obseruamus, si punctum μ sit in distantia sensibili a superficie t, valores omnium $\theta(\mu, \mathrm{d}t)$ insensibiles fore: in hoc itaque casu totum integrale (II) insensibile erit. Hoc itaque integrale eatenus tantum valorem sensibilem acquirere potest, quatenus superficies t offert partes in distantia insensibili a puncto μ positas, manifestoque sufficit, integrale (II) per tales partes extendere, neglectis omnibus quae sunt in distantiis sensibilibus.

Porro pro $\frac{\mathrm{d}t \,.\, \cos q}{(\mu, \mathrm{d}t)^2}$ restituemus $\pm\, \mathrm{d}\Pi$, denotante $\mathrm{d}\Pi$ in superficie sphaerica radio $= 1$ circa centrum μ descripta elementum id, in quod elementum $\mathrm{d}t$ inde a puncto μ visum proiicitur, et valente signo superiori vel inferiori, prout elementum $\mathrm{d}t$ plagam exteriorem vel interiorem puncto μ aduertit. Hoc pacto integrale (II) ita exhibetur

$$\int \pm\, \mathrm{d}\Pi \,.\, \cos Q \,.\, \theta(\mu, \mathrm{d}t)$$

patetque, huius integralis valorem eatenus tantum sensibilem fieri posse, quatenus elementa $\mathrm{d}\Pi$ talia, quae ad distantias insensibiles $(\mu, \mathrm{d}t)$ referuntur, spatium magnitudinis sensibilis in superficie sphaerica explent.

Hinc facile colligitur, integrale nostrum, generaliter loquendo, etiam insensibile manere, quoties punctum μ iaceat in ipsa superficie t: patet enim, proiectiones omnium elementorum $\mathrm{d}t$ a puncto μ insensibiliter remotorum esse in distantia insensibili a circulo maximo, quem format in superficie sphaerica planum superficiem t in puncto μ tangens. Excipere oportet tres casus, puta

1) eum, vbi radii curuaturae superficiei t in puncto μ sunt magnitudinis insensibilis.

2) eum, vbi continuitas curuaturae in puncto μ, vel intra distantiam insensibilem ab eo interrumpitur (Conf. *Disquiss. gen. circa superficies curuas* art. 3).

3) eum, vbi superficies t offert partem aliam a puncto μ insensibiliter distantem, puta si apud hoc punctum crassities spatii s est insensibilis. Ceterum huncce casum ei quem in art. seq. tractabimus adnumerare licet.

15.

Superest scilicet casus, vbi punctum μ non est in superficie ipsa t, attamen in distantia insensibili ab ea: in hoc casu integrale nostrum vtique valorem sensibilem habere potest, quem iam accuratius examinabimus.

Secent superficiem sphaericam recta a puncto μ normaliter in superficiem t ducta, atque recta fixa ibinde proficiscens resp. in punctis G, H; statuatur arcus $GH = k$, arcus autem inter G atque punctum indefinitum superficiei sphaericae $= v$; denique sit w angulus sphaericus inter arcus k, v. Hoc pacto pro elemento $\mathrm{d}\Pi$ accipere licet productum $\sin v . \mathrm{d} v . \mathrm{d} w$, vnde scribendo breuitatis caussa r pro $(\mu, \mathrm{d}t)$, integrale (II) fit

$$= \int\int \pm (\cos k . \cos v + \sin k . \sin v . \cos w) \theta r . \sin v . \mathrm{d} v . \mathrm{d} w$$

quam integrationem extendere tantummodo oportet per eas partes superficiei sphaericae, in quas distantiae insensibiles r proiiciuntur. Referuntur hae ad partem insensibilem superficiei t, quam si pro *plana* habemus, distantiamque minimam (puncto G seu valori $v = 0$ respondentem) per ρ denotamus, fit $r = \frac{\rho}{\cos v}$, siue a w independens; perfecta itaque integratione respectu variabilis w, puta a $w = 0$ vsque ad $w = 360°$, integrale fit

$$= \pm \int 2\pi\theta r . \cos k . \cos v . \sin v . \mathrm{d} v = \pm \int \frac{2\pi \cos k . \rho\rho\theta r . \mathrm{d} r}{r^3}$$

quae integratio extendenda est ab $r = \rho$ vsque ad valorem sensibilem arbitrarium quantumuis paruum. Statuendo itaque generaliter

$$2rr\int \frac{\theta r . \mathrm{d} r}{r^3} = -\theta' r$$

accepta constante integrationis ita vt fiat $\int \frac{\theta r \,.\, \mathrm{d}r}{r^3} = 0$ pro valore arbitrario sensibili intra ambitum eorum, circa quos experimenta instituere licet, erit integrale (II), neglectis insensibilibus,

$$= \pm \pi \cos k \,.\, \theta' \varrho$$

Si dubium videretur, vtrum fas sit, partem superficiei t intra distantiam insensibilem a puncto μ positam pro plana habere, consideremus eius loco sphaericam, et quidem sit R distantia centri sphaerae a puncto μ positiue vel negatiue sumenda, prout centrum est in directione versus G vel in opposita. Ita erit

$$\cos v = \frac{\varrho}{r}\left(1 - \frac{\varrho}{2R}\right) + \frac{r}{2R}$$

$$\sin v \,.\, \mathrm{d}v = \left[\frac{\varrho}{rr}\left(1 - \frac{\varrho}{2R}\right) - \frac{1}{2R}\right]\mathrm{d}r$$

vnde facile colligitur, integrale pro hoc casu non differre quantitate sensibili a valore prius inuento $\pm \pi \cos k \,.\, \theta' \varrho$, si modo R sit quantitas sensibilis. Quaecunque autem sit curuatura superficiei t in ea parte, de qua agitur, dummodo radii curuaturae non sint insensibiles, semper duae superficies sphaericae assignari poterunt, superficiem t in puncto ipsi μ proximo tangentes, intra quas t sita sit, et quarum radii sint magnitudinis sensibilis, manifestoque tunc integrale nostrum intra integralia ad illas superficies relata cadet, et proin absque errore sensibili per eandem formulam exprimetur, quae tunc tantummodo exceptionem patitur, vbi superficies t in distantia insensibili a puncto μ vel curuaturam radii insensibilis, vel aciem vel cuspidem offert.

16.

Quodsi iam ab integratione (II) ad integrale (I) progredimur, manifestum est, hoc insensibile fieri, non solum in eo casu, vbi illa pro *nullo* puncto superficiei T valorem sensibilem produxit, sed in eo quoque, vbi complexus elementorum superficiei T, pro quorum punctis integrale (II) sensibile euaserat, aream tantummodo insensibilis magnitudinis sistit. Quae

si rite perpenduntur, apparebit, integrale (I) eatenus tantum valorem sensibilem acquirere posse, quatenus superficies T partem vel partes sensibilis magnitudinis contineat in distantia insensibili a superficie t positas. Quales partes quum a parallelismo cum superficie t sensibiliter deuiare nequeant, pro quouis earum puncto $\cos k$ non sensibiliter differet vel a $+1$ vel a -1, prout plaga superficiei T exterior vel interior superficiei t aduertitur. Quodsi itaque per τ, τ' eas partes superficiei T denotamus, quae sunt in distantia insensibili a superficie t, et quidem per τ eas, vbi plaga exterior alterius superficiei plagae interiori alterius aduertitur, per τ' autem eas, vbi plagae homonymae sibi mutuo obuertuntur, denique per ϱ distantiam minimam cuiusuis elementi $\mathrm{d}\tau$ vel $\mathrm{d}\tau'$ a superficie t, integrale nostrum (I) neglectis insensibilibus fit

$$= -\int \pi \theta' \varrho . \mathrm{d}\tau + \int \pi \theta' \varrho . \mathrm{d}\tau'$$

Manifesto hic nihil interest, vtrum partes τ, τ' ad superficiem T an ad t referantur.

Hoc itaque modo iam nacti sumus solutionem completam problematis, quod in art. 6 nobis proposueramus, pro ea functionis φ indole, cui tamquam basi disquisitio principalis de figura aequilibrii fluidorum innititur, scilicet habemus

$$\int\int \mathrm{d}s . \mathrm{d}S . \varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S) = 4\pi\sigma\psi 0 - \pi \daleth \theta 0 + \pi \daleth' \theta 0 - \pi \int \mathrm{d}\tau . \theta' \varrho + \pi \int \mathrm{d}\tau' . \theta' \varrho$$

17.

Origo functionis θ' ita enunciari potest, vt sit

$$\frac{\theta' r}{r r} = \int \frac{2 \theta x . \mathrm{d}x}{x^3}$$

sumto integrali ab $x = r$ vsque ad valorem constantem sensibilem arbitrarium, quem hic per R denotamus. Manifesto hoc integrale minus erit quam hoc $\int \frac{2 \theta r . \mathrm{d}x}{x^3}$ inter eosdem limites, quod est $= \frac{\theta r}{r r} - \frac{\theta r}{R R}$, adeoque a potiori minus quam $\frac{\theta r}{r r}$. Quum autem indefinite habeatur

$$\int \frac{2\theta x . dx}{x^3} = -\frac{\theta x}{xx} + \int \frac{d\theta x}{xx} = -\frac{\theta x}{xx} - \int \frac{\psi x . dx}{xx}$$

erit

$$\frac{\theta' r}{rr} = \frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta R}{RR} - \int \frac{\psi x . dx}{xx}$$

sumto integrali inter eosdem limites, quod minus erit quam integrale $\int \frac{\psi r . dx}{xx}$, adeoque etiam minus quam $\frac{\psi r}{r}$; quocirca valor ipsius $\frac{\theta' r}{rr}$ maior erit quam

$$\frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta R}{RR} - \frac{\psi r}{r}$$

Cadit itaque $\theta' r$ inter limites

$$\theta r \text{ atque } \theta r - rr . \frac{\theta R}{RR} - r \psi r$$

quorum differentia, decrescente r in infinitum, manifesto quauis quantitate assignabili minor euadere potest, quum supponamus esse vel $\psi 0$ quantitatem finitam. Colligimus hinc, statui debere $\theta' 0 = \theta 0$. Patet itaque, in formula, ad quam in art. praec. peruenimus, terminum $-\pi \mathsf{T} \theta 0$ tamquam sub termino $-\pi \int d\tau . \theta' \varrho$, atque terminum $\pi \mathsf{T}' \theta 0$ tamquam sub termino $\pi \int d\tau' . \theta' \varrho$ comprehensum considerari posse, si distinctionem, quam inter distantiam insensibilem et distantiam nullam fecimus, tolleremus, atque partes T, T' resp. partibus τ, τ' adnumeraremus. Sed quamquam hoc modo solutionis elegantia sensu mathematico augeretur, tamen ad propositum nostrum praestat, distinctionem illam conseruare.

18.

In applicatione disquisitionis praecedentis ad euolutionem termini secundi expressionis Ω art. 3, spatium secundum inde ab art. 6 per S denotatum cum primo identicum est; quae itaque in art. 16 erant $\sigma, \mathsf{T}, \mathsf{T}'$, hic erunt s, t, 0, si t denotat totam superficiem spatii s a fluido impleti. Quapropter quoties hoc spatium neque partes sensibilis extensionis sed in-

sensibilis crassitiei continet, neque eiusmodi interstitia (fissuras), pars secunda expressionis Ω fit

$$= \frac{1}{2}\pi cc(s\psi 0 - t\theta 0)$$

Exceptiones itaque adsunt duae:

1) Si spatium s continet partem insensibilis crassitiei, huius superficies duas partes sensibiliter aequales offeret, quarum alterutra per t' denotata, crassitieque spatii apud quoduis elementum $\mathrm{d}t'$ indefinite per ρ, accedet expressioni praecedenti terminus

$$\pi cc\int\theta'\rho\,.\,\mathrm{d}t'$$

2) Si spatium s continet cauitatem insensibilis crassitiei, accedet similis terminus, puta $\pi cc\int\theta'\rho\,.\,\mathrm{d}t''$, denotante t'' alterutram partem superficiei t fissurae contiguam, atque ρ indefinite crassitiem fissurae in quouis puncto.

In euolutione termini tertii expressionis Ω signum S retinendum erit, vt denotet spatium a vase repletum, sed loco characteristicae f characteristicam F ad vim attractiuam molecularum vasis relatam substituere oportebit, et perinde loco functionum per characteristicas φ, ψ, θ, θ' denotatarum alias per characteristicas Φ, Ψ, Θ, Θ' denotandas adhibere, quas perinde ab F pendere supponimus vt illas ab f. Quae in disquisitione generali erant σ, $\daleth'$, hic manifesto erunt 0: pro $\daleth$ vero hic simpliciter literam T adoptabimus, vt indicet non superficiem totam spatii S, sed eam partem, quae fluido contigua est. Hoc pacto pars tertia expressionis Ω fit, generaliter loquendo,

$$= \pi cCT\Theta 0$$

exceptis etiam hic duobus casibus, puta

3) Si apud partem sensibilem T' superficiei T fluidum crassitiem insensibilem habet, indefinite per ρ exprimendam, accedet terminus

$$-\pi cC\int\Theta'\rho\,.\,\mathrm{d}T'$$

4) Si superficies vasis praeter partem T fluido contiguam, offert aliam T'' in distantia quidem sed insensibili a fluido positam, accedet, denotante ρ indefinite hanc distantiam pro quolibet puncto, terminus

$$+\pi cC\int\Theta'\rho\,.\,\mathrm{d}T''$$

Superfluum foret, exceptioni primae, quatenus sub tertia non continetur, nec non secundae vel quartae immorari: etiamsi enim aequilibrium fluidi in casibus quibusdam huc referendis, attamen maxime specialibus, locum habere queat, tale aequilibrium nec stabile neque experimentis accessibile esse posset. Contra casus exceptus primus, quatenus sub tertio continetur, vtique theoriae essentialis est, verumtamen aliquantisper hic seponetur, vt conditiones aequilibrii, quatenus absque cute fluidi insensibili, vasi adhaerente, consistere potest, explorentur.

Dum itaque omnes has exceptiones seponimus, expressio, cuius valor in statu aequilibrii maximum esse debet, haec erit

$$-gc\int z\,\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}ccs\psi 0 - \tfrac{1}{2}\pi cct\theta 0 + \pi cCT\Theta 0$$

et quum in omnibus mutationibus, quas figura fluidi subire potest, spatium s inuariatum maneat, expressio sequens

$$\int z\,\mathrm{d}s + \frac{\pi c\theta 0}{2g}.t - \frac{\pi C\Theta 0}{g}.T$$

in statu aequilibrii *minimum* esse debebit.

Jam supra monuimus, $\frac{c\theta 0}{g}$ exhibere spatium duarum dimensionum, idemque de $\frac{C\Theta 0}{g}$ valet. Statuendo itaque

$$\frac{\pi c\theta 0}{2g} = \alpha\alpha,\ \frac{\pi C\Theta 0}{2g} = \beta\beta$$

erunt α, β lineae constantes a relatione grauitatis ad intensitatem virium, quas partes fluidi a se mutuo et a moleculis vasis patiuntur, pendentes; et si porro partem liberam superficiei fluidi, i. e. eam quae vasi non est contigua, per U denotamus, vt habeatur $t = T + U$, minimum esse debet in statu aequilibrii expressio sequens, abhinc per W denotanda:

$$\int z\,\mathrm{d}s + (\alpha\alpha - 2\beta\beta)T + \alpha\alpha U$$

19.

Antequam quae ex hoc theoremate grauissimo sequuntur generaliter et complete euoluamus, operae pretium erit ostendere, quanta facilitate phaenomenon principale tuborum capillarium inde demanet.

Consideremus fluidum in aequilibrio in vase bicrurali, ita vt pars superficiei liberae fluidi sit in primo crure, pars alia in secundo: parietes vasis in confiniis harum partium verticales supponimus. Sit a area sectionis horizontalis internae primi cruris (vel exactius proiectionis horizontalis superficiei liberae fluidi in primo crure), b eiusdem peripheria, denique ah volumen fluidi in hoc crure, pariete verticali deorsum vsque ad planum, a quo numerantur distantiae z, continuato, siue, quod eodem redit, h altitudo media fluidi supra hoc planum: similia denotentur pro secundo crure per literas a', b', h'. Si statum fluidi mutationem infinite paruam subire concipimus, et quidem talem, vt vtraque superficiei liberae pars figuram suam seruet, variatio partis primae expressionis W, puta integralis $\int z\,\mathrm{d}s$, manifesto erit

$$= ah\,\mathrm{d}h + a'h'\,\mathrm{d}h'$$

variatio ipsius T autem

$$= b\,\mathrm{d}h + b'\,\mathrm{d}h'$$

denique per hyp. $\mathrm{d}\,U = 0$. Hinc colligitur

$$\mathrm{d}W = ah\,\mathrm{d}h + a'h'\,\mathrm{d}h' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\,(b\,\mathrm{d}h + b'\,\mathrm{d}h')$$

Porro quum volumen integrum fluidi inuariatum maneat, erit

$$a\,\mathrm{d}h + a'\,\mathrm{d}h' = 0$$

et proin

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}h\left[a(h-h') - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)\right]$$

Conditio itaque, vt W in statu aequilibrii sit minimum, perducit ad aequationem, phaenomenon principale tuborum capillarium implicantem

$$h - h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)$$

sponteque patet, huic aequationi reuera respondere valorem *minimum* ipsius W, quum valor ipsius $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}h^2}$ fiat $= a + \frac{aa}{a'}$, i. e. natura sua positiuus.

Crus secundum priori largius pronunciatur, si quotiens $\frac{a'}{b'}$ est maior quam $\frac{a}{b}$; fluidum itaque in crure arctiori magis depressum vel magis

eleuatum erit quam in largiori, prout quadratum $\beta\beta$ minus vel maius est quam $\frac{1}{2}\alpha\alpha$; et si forte haberetur $\beta\beta = \frac{1}{2}\alpha\alpha$, altitudo in vtroque crure eadem foret. Si crus secundum tam largum est, vt $\frac{b'}{a'}$ negligi possit prae $\frac{b}{a}$, erit proxime

$$h - h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a}$$

In tubis itaque capillaribus cylindricis fluidi depressio vel eleuatio diametro tubo reciproce proportionalis est. Haec omnia tum cum experientia tum cum iis, quae ill. Laplace per theoriam stabilire conatus est, conveniunt.

Si vas pluribus cruribus verticalibus inter se communicantibus instructum est, designent a'', b'', h'' pro tertio, a''', b''', h''' pro quarto etc. eadem, quae a, b, h pro primo, eritque etiam

$$h - h'' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(\frac{b}{a} - \frac{b''}{a''}\right)$$

$$h - h''' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\left(\frac{b}{a} - \frac{b'''}{a'''}\right)$$

Concinnius hae aequationes ita exhibentur:

$$h - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a} = h' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'}{a'} = h'' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b''}{a''}$$

$$= h''' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'''}{a'''} \text{ etc.}$$

Quum planum horizontale, a quo altitudines numerantur, arbitrarium sit, patet, si illud ita assumatur, vt sit

$$h = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a}$$

etiam in reliquis cruribus fore

$$h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'}{a'},\ h'' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b''}{a''},\ h''' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'''}{a'''} \text{ etc.}$$

Hocce planum, cuius conceptum infra generalius stabiliemus, vocari potest

planum horizontale normale (plan de niveau). Supponendo (si opus est) parietes verticales singulorum crurium vsque ad hoc planum productos, ah, $a'h'$, $a''h''$ etc. expriment, pro $2\,66 > \alpha\alpha$, quantitates fluidi in singulis cruribus supra hoc planum eleuati, vel pro $2\,66 < \alpha\alpha$, quantitates fluidi infra hoc planum in singulis cruribus deficientis: hae itaque quantitates aequales sunt productis ex area constante $2\,66 - \alpha\alpha$ in circumferentias b, b', b'', b''' etc.

20.

Superest iam, vt e theoremate art. 18 indolem figurae aequilibrii determinemus, cuius negotii cardo vertitur in euolutione generali variationis, quam expressio W patitur, dum figura spatii a fluido impleti mutationem quamcunque infinite paruam subit. Sed quum calculus variationum integralium duplicium pro casu, vbi etiam limites tamquam variabiles spectari debent, hactenus parum excultus sit, hanc disquisitionem subtilem paullo profundius petere oportet.

Considerabimus superficiei, quae spatium s a reliquo spatio separat, partem U, atque quoduis illius punctum per tres coordinatas x, y, z determinari supponemus, quarum tertia sit distantia a plano horizontali arbitrario. Spectari itaque poterit z tamquam functio indeterminatarum x, y, cuius differentialia partialia secundum morem suetum, sed omissis vinculis, per

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

denotabimus. In quouis superficiei puncto rectam superficiei normalem et respectu spatii s extrorsum directam concipimus, cosinusque angulorum inter hanc normalem atque rectas axibus coordinatarum x, y, z parallelas per ξ, η, ζ denotamus. Hoc pacto erit

$$\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\xi}{\zeta},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\eta}{\zeta}.$$

Limes superficiei U erit linea in se rediens, quam per P denotamus, et

dum motu continuo descripta supponitur, eius elementa dP (perinde vt elementa superficiei dU) semper positiue accipiemus. Cosinus angulorum, quos directio elementi dP facit cum axibus coordinatarum x, y, z, per X, Y, Z denotamus: ne vero sensus directionis ambiguus maneat, hanc ita decernimus, vt ipsa primo loco, directio normalis in elementum dP superficiem U tangentis et huius respectu introrsum ductae secundo loco, denique normalis in superficiem respectuque spatii s extrorsum ducta tertio loco, constituant systema trium rectarum similiter deinceps sitarum, vt axes coordinatarum x, y, z. Ita facile perspicietur (cf. Disquiss. gen. circa superficies curuas art. 2), cosinus angulorum inter directionem illam secundam atque axes coordinatarum x, y, z esse resp.

$$\eta^\circ Z - \zeta^\circ Y,\ \zeta^\circ X - \xi^\circ Z,\ \xi^\circ Y - \eta^\circ X$$

si ξ°, η°, ζ° sint valores ipsarum ξ, η, ζ pro puncto elementi dP.

21.

His ita praeparatis supponamus, superficiem U pati mutationem qualemcunque infinite paruam. Si sufficeret, tales tantummodo mutationes considerare, pro quibus limes P semper inuariatus, vel saltem in eadem superficie verticali maneret, manifesto soli coordinatae tertiae z variationem inducere oporteret, quo pacto problema longe facilius euaderet; sed quum problema maxima generalitate nobis ventilandum sit, in tali inuestigationis modo consideratio variabilitatis limitum in ambages incommodas concinnitatemque turbantes perduceret; quamobrem praestabit, statim ab initio omnes tres coordinatas variationi subiicere. Rem itaque sic imaginabimur, vt cuiuis puncto superficiei, cuius coordinatae sunt x, y, z substituamus aliud, cuius coordinatae sint $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, vbi δx, δy, δz spectari possunt tamquam functiones indeterminatae ipsarum x, y, sed quarum valores manent infinite paruae. Inquiramus nunc in variationes singulorum elementorum expressionis W, et quidem initium faciamus a variatione ipsius elementi dU.

Concipiamus elementum superficiei U triangulare dU inter puncta, quorum coordinatae sint

$$x, \quad y, \quad z$$

$$x + \mathrm{d}x,\ y + \mathrm{d}y,\ z + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

$$x + \mathrm{d}'x,\ y + \mathrm{d}'y,\ z + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'z + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y$$

Area duplex huius trianguli per principia nota inuenitur

$$= (\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x)\ \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]}$$

si, quod licet, supponimus, $\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x$ esse quantitatem positiuam.

In superficie variata loco illorum punctorum tria alia habebimus, quorum coordinatae erunt

puncti primi $x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z$

puncti secundi

$$x + \mathrm{d}x + \delta x + \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

$$y + \mathrm{d}y + \delta y + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

$$z + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y + \delta z + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

puncti tertii

$$x + \mathrm{d}'x + \delta x + \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x + \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y$$

$$y + \mathrm{d}'y + \delta y + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y$$

$$z + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y + \delta z + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y$$

Area duplex trianguli inter haec puncta inuenitur per eandem methodum

$$= (\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x)\ \sqrt{N}$$

si breuitatis caussa per N denotatur aggregatum

$$\left[\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)-\frac{d\delta x}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right]^2$$
$$+\left[\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}+\frac{d\delta z}{dy}\right)-\frac{d\delta x}{dy}\left(\frac{dz}{dx}+\frac{d\delta z}{dx}\right)\right]^2$$
$$+\left[\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}+\frac{d\delta z}{dx}\right)-\frac{d\delta y}{dx}\left(\frac{dx}{dy}+\frac{d\delta z}{dy}\right)\right]^2$$

Facta euolutione et reiectis quantitatibus secundi ordinis, inuenitur

$$\sqrt{N}=\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}\cdot\left[1+\frac{L}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\right]$$

si breuitatis gratia per L denotatur aggregatum

$$\frac{d\delta x}{dx}\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]-\frac{d\delta x}{dy}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}-\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}$$
$$+\frac{d\delta y}{dy}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]+\frac{d\delta z}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d\delta z}{dy}\cdot\frac{dz}{dy}$$

Est itaque ratio trianguli primi ad secundum vt 1 ad $1+\frac{L}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, adeoque independens a figura trianguli dU, resultatque

$$\delta dU=\frac{L\,dU}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

siue in terminis explicitis

$$\delta dU=dU\left(\frac{d\delta x}{dx}(\eta\eta+\zeta\zeta)-\frac{d\delta x}{dy}\cdot\xi\eta-\frac{d\delta y}{dx}\cdot\xi\eta\right.$$
$$\left.+\frac{d\delta y}{dy}(\xi\xi+\zeta\zeta)-\frac{d\delta z}{dx}\cdot\xi\zeta-\frac{d\delta z}{dy}\cdot\eta\zeta\right)$$

22.

Variationem totius superficiei U obtinebimus per integrationem huius expressionis per omnia elementa dU extendendam. Ad hunc finem duas huius integralis partes, puta

$$\int \mathrm{d}U.\left((\eta\eta + \zeta\zeta)\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} - \xi\eta\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \xi\zeta\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right) = A$$

atque $$\int \mathrm{d}U.\left(-\xi\eta\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y} + (\xi\xi + \zeta\zeta)\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} - \eta\zeta\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right) = B$$

seorsim tractabimus.

Concipiatur planum axi coordinatarum y normale, et quidem tale, vt valor determinatus ipsius y, ei competens, sit intra ambitum valorum extremorum, quos habet y in superficie U. Hoc planum peripheriam P secabit vel in duobus, vel in quatuor, vel in sex etc. punctis, quorum coordinatae primae sint deinceps x°, x', x'' etc.; perinde reliquae quantitates ad haec puncta pertinentes per indices distinguantur. Eodem modo secetur superficies per aliud planum illi infinite propinquum et parallelum, cui competat coordinata secunda $y + \mathrm{d}y$; inter haec plana reperientur elementa peripheriae $\mathrm{d}P^{\circ}$, $\mathrm{d}P'$, $\mathrm{d}P''$ etc., perspicieturque facile, haberi

$$\mathrm{d}y = -Y^{\circ}\mathrm{d}P^{\circ} = +Y'\mathrm{d}P' = -Y''\mathrm{d}P'' = +Y'''\mathrm{d}P''' \text{ etc.}$$

Si insuper concipimus infinite multa plana axi coordinatarum x normalia, cuiuis elemento $\mathrm{d}x$ inter x° et x', vel inter x'' et x''' etc. sito respondebit elementum $\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}{\zeta}$, vnde patet, eam partem integralis A, quae respondet parti superficiei inter plana y, $y + \mathrm{d}y$ sitae, haberi ex integratione

$$\mathrm{d}y\int\mathrm{d}x.\left(\frac{\eta\eta + \zeta\zeta}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} - \frac{\xi\eta}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \xi\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)$$

extensa ab $x = x^{\circ}$ vsque ad $x = x'$, dein ab $x = x''$ vsque ad $x = x'''$ etc. Indefinite vero hoc integrale exhibetur per

$$\left(\frac{\eta\eta + \zeta\zeta}{\zeta}.\delta x - \frac{\zeta\eta}{\zeta}.\delta y - \xi\delta z\right)\mathrm{d}y$$

$$-\,\mathrm{d}y\int\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta + \zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \text{[illegible]}\right.$$

vnde colligitur, prodire pro casu nostr[illegible]

$$\left(\frac{\eta^\circ\eta^\circ+\zeta^\circ\zeta^\circ}{\zeta^\circ}.\delta x^\circ-\frac{\xi^\circ\eta^\circ}{\zeta^\circ}.\delta y^\circ-\xi^\circ\delta z^\circ\right)Y^\circ\mathrm{d}P^\circ$$
$$+\left(\frac{\eta'\eta'+\zeta'\zeta'}{\zeta'}.\delta x'-\frac{\xi'\eta'}{\zeta'}.\delta y'-\xi'\delta z'\right)Y'\mathrm{d}P'$$
$$+\left(\frac{\eta''\eta''+\zeta''\zeta''}{\zeta''}.\delta x''-\frac{\xi''\eta''}{\zeta''}.\delta y''-\xi''\delta z''\right)Y''\mathrm{d}P''$$
$$+\text{ etc.}$$
$$-\int\zeta\mathrm{d}U.\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta z.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)$$

siue, quod idem est,

$$\Sigma\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}.\delta x-\frac{\xi\eta}{\zeta}.\delta y-\xi\delta z\right)Y\mathrm{d}P$$
$$-\int\zeta\mathrm{d}U.\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta z.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)$$

vbi tum summatio per omnia elementa $\mathrm{d}P$, tum integratio per omnia elementa $\mathrm{d}U$, intra plana y et $y+\mathrm{d}y$ sita, extendenda est.

Tota itaque quantitas A exprimetur per

$$\int\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}.\delta x-\frac{\xi\eta}{\zeta}.\delta y-\xi\delta z\right)Y\mathrm{d}P$$
$$-\int\zeta\mathrm{d}U.\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta z.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)$$

vbi integrationem priorem per totam peripheriam P, posteriorem per totam superficiem U extendere oportet.

23.

Per ratiocinia prorsus similia inuenimus $B =$

$$\int \left(\frac{\xi\eta}{\zeta}.\delta x - \frac{\xi\xi + \zeta\zeta}{\zeta}.\delta y + \eta\delta z\right) X\mathrm{d}P$$

$$+ \int \zeta \mathrm{d} U \left(\delta x . \frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} - \delta y . \frac{\mathrm{d}\frac{\xi\xi + \zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} + \delta z . \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

Statuendo itaque, pro quouis puncto peripheriae P,

$$[X\xi\eta + Y(\eta\eta + \zeta\zeta)]\delta x - [X(\xi\xi + \zeta\zeta) + Y\xi\eta]\delta y + (X\eta\zeta - Y\xi\zeta)\delta z = \zeta Q$$

nec non, pro quouis puncto superficiei U,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta + \zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}\right)\zeta\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\frac{\xi\xi + \zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}y}\right)\zeta\mathrm{d}y$$
$$+ \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)\zeta\delta z = V$$

erit tandem

$$\delta U = \int Q\mathrm{d}P + \int V\mathrm{d}U$$

vbi integratio prima per totam peripheriam P, secunda per totam superficiem U extendi debet.

24.

Formulas pro Q et V modo allatas notabiliter contrahere licet. Et quidem, adiumento aequationis $X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0$; Q statim induit formam symmetricam sequentem:

$$Q = (Y\zeta - Z\eta)\,\delta x + (Z\xi - X\zeta)\,\delta y + (X\eta - Y\xi)\,\delta z$$

Quo etiam expressio pro V eruta in formam concinniorem reducatur, obseruamus, e formulis

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\xi}{\zeta},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\eta}{\zeta}$$

sequi

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\xi}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}$$

Hinc fit

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\xi}{\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} + \eta\,\frac{\mathrm{d}\frac{\xi}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\xi}{\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} + \eta\,\frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}$$

Porro ex $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$ deducimus

$$\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} + \zeta\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = 0$$

atque hinc

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} = \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} + \frac{\eta}{\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}$$

$$= \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \frac{\xi}{\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$$

Substitutis his valoribus in coëfficiente ipsius δx in expressione pro V, ille fit

$$= \xi\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

Prorsus simili modo coëfficiens ipsius δy in eadem expressione transit in

$$\eta\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

Hoc itaque pacto nanciscimur

$$V = (\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z)\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

25.

Antequam vlterius progrediamur, significationem geometricam expressionum erutarum illustrare conueniet. Ad hunc finem directiones varias hic occurrentes intuitioni faciliori subiiciemus sequendo eum modum, quem in Disquiss. gen. circa superficies curuas introduximus, puta referendo illas ad puncta superficiei sphaericae radio = 1 circa centrum arbitrarium descriptae. Primo itaque directiones axium coordinatarum x, y, z denotabimus per puncta (1), (2), (3); dein directionem normalis

in superficiem et respectu spatii s extrorsum ductae per punctum (4); denique directionem rectae a quolibet superficiei puncto versus ipsius locum variatum ductae, per punctum (5). Variationem loci ipsam, seu quantitatem $\surd(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)$, semper positiue sumendam, breuitatis caussa per δe denotabimus, arcumque inter duo sphaerae puncta, vt e. g. (1) et (5), siue angulum, qui illum arcum mensurat, ita (1, 5) scribemus. Erit itaque

$$\delta x = \delta e . \cos(1, 5), \quad \delta y = \delta e . \cos(2, 5), \quad \delta z = \delta e . \cos(3, 5)$$

Haec pro quouis superficiei puncto valent. In eius limite, seu peripheria P, duae aliae directiones accedunt. Primo directio elementi $\mathrm{d}P$, cui respondeat punctum (6); dein directio rectae huic normalis superficiem tangentis eiusque respectu introrsum ductae, cui respondeat punctum (7). Per hypothesin nostram puncta (6), (7), (4) eodem ordine iacent, vt (1), (2), (3); obseruetur praeterea, (4, 6), (4, 7), (6, 7), exhibere quadrantes seu angulos rectos. Ita prodeunt aequationes iam supra (art. 20) traditae

$$\eta Z - \zeta Y = \cos(1, 7), \quad \zeta X - \xi Z = \cos(2, 7), \quad \xi Y - \eta X = \cos(3, 7)$$

formulaeque art. praec. has formas induunt:

$$Q = - \delta e . \cos(5, 7)$$

$$V = \delta e . \cos(4, 5) . \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

Exprimit itaque Q translationem cuiusuis puncti peripheriae P a plano hanc tangente superficiei U normali, in plaga ab hac auersa positiue sumendam; factor ipsius V autem $\delta e . \cos(4, 5)$ manifesto indicat translationem cuiusuis puncti superficiei U a plano hanc tangente, positiue sumendam in plaga a spatio s auersa.

Sed etiam factorem alterum ipsius V per significationem geometricam explicare licet. Habemus enim

$$\xi = - \zeta . \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \quad \eta = - \zeta . \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{1}{\zeta\zeta} = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

Hinc prodit

$$\mathrm{d}\zeta = \xi\zeta\zeta\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \eta\zeta\zeta\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = -\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}$$

$$= -\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} + \xi\xi\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}$$

$$= -\zeta(\eta\eta + \zeta\zeta)\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} = -\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} + \eta\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}$$

$$= -\zeta(\xi\xi + \zeta\zeta)\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}$$

et proin $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} =$

$$-\zeta^3\left[\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right] - \frac{2\,\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\right]$$

cuius expressionis valorem constat esse

$$= \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

denotantibus R, R' radios curuaturae extremos in puncto de quo agitur, et quidem positiue accipiendos, quoties conuexitas superficiei extrorsum vertitur.

26.

Examen attentum analysis nostrae inde ab art. 22 patefaciet suppositionem tacitam illi adhaerentem, scilicet quibusuis valoribus coordinatarum x, y vnicum tantummodo valorem ipsius z respondere, atque valorem ipsius ζ vbique per totam superficiem U esse positiuum. Nihilominus veritas theorematis finalis, ad quod analysis ista perduxit, puta (I)

$$\delta U = -\int \delta e \,.\cos(5,7)\,.\,\mathrm{d}P + \int \delta e\,.\cos(4,5)\,.\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\mathrm{d}U$$

ad hanc suppositionem non restringitur, sed generaliter valet. Quam generalitatem si statim ab initio amplecti voluissemus, vel quasdam ambages incurrere, vel methodum aliquantum diuersam sequi oportuisset: sed ad eundem finem etiam per considerationes sequentes facile peruenire licet.

Analysis nostra manifesto independens est a suppositione, quod axis coordinatarum z est verticalis, quin potius in illa situs axium prorsus arbitrarius manet, veritasque theorematis stabilita est pro omnibus superficiebus, pro quibus complexus omnium punctorum (4) vnico hemisphaerio includi potest; sufficit enim, talis hemisphaerii centrum (polum) pro (3) adoptare.

Si vero proponitur superficies huic conditioni non satisfaciens, certe in duas pluresue partes dispesci poterit, quae singulae tali conditioni satisfaciant. Jam facile perspicietur, si superficies quaedam in duas partes diuisa fuerit, veritatem theorematis pro figura tota statim sequi e veritate pro singulis partibus. Constet enim figura U e partibus U', U'', sitque P' peripheria figurae U', atque P'' peripheria figurae U''; porro habeant P', P'' partem communem P''', ita vt P' constet ex P''' et P'''', P'' vero ex P''' et P''''', vnde manifesto peripheria figurae U integra P constabit ex P'''' et P'''''. Ita erit quidem

$$\int \delta e \,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P' = \int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P''' + \int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P''''$$

$$\int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P'' = \int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P''' + \int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P'''''$$

sed probe notandum, valorem integralis $\int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P'''$, quatenus est pars prioris integralis, exacte oppositum esse valori eiusdem integralis, quatenus est pars posterioris integralis, quum cuiuis puncto lineae P''', in his duobus casibus directionibus oppositis describendae, loca puncti (7) opposita adeoque valores oppositi factoris $\cos(5,7)$ respondeant. In additione itaque hae partes sese destruunt, fitque

$$\int \delta e\,.\cos(5,7)\,.\,\mathrm{d}P' + \int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P'' = \int \delta e\,.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P$$

vnde, quum habeatur $\delta U = \delta U' + \delta U''$, valor ipsius δU cum formula allata (I) conspirans sponte demanat, dum haec formula cum valoribus variationum $\delta U'$, $\delta U''$ quadrare supponitur.

Denique obseruamus, veritatem theorematis (I) etiam e considerationibus geometricis hauriri potuisse, et quidem facilius quam per methodum analyticam, quam tamen hic ideo praetulimus, vt occasionem, calculo variationum, pro integralibus duplicibus limitibus variabilibus inclusis parum hactenus exculto, aliquid lucis effundendi arriperemus, methodum alteram geometricam satis obuiam lectori perito relinquentes.

27.

Superest vt variationes euoluamus, quas elementa reliqua expressionis W per variationem figurae spatii s patiuntur, et primo de variatione voluminis spatii s agemus.

Resumamus duo triangula in art. 21 considerata, iungamusque bina latera respondentia per plana, vt oriatur solidum, cuius loco accipere licet prisma basis $\mathrm{d}U$, altitudinis $\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z = \delta e . \cos(4, 5)$, et quidem haec forma dabit altitudinem in forma positiua seu negatiua, prout triangulum transpositum et proin totum solidum iacet extra vel intra spatium s. Hinc habemus (II)

$$\delta s = \int \mathrm{d}U . \delta e . \cos(4, 5)$$

Porro hinc sequitur, variationem integralis $\int z\,\mathrm{d}s$ esse (III)

$$\delta \int z\,\mathrm{d}s = \int z\,\mathrm{d}U . \delta e . \cos(4, 5)$$

Quod vero attinet ad variationem quantitatis T, ante omnia obseruamus, quum P denotet limitem communem superficierum T, U, transpositiones punctorum peripheriae P satisfacere debere huic conditioni, vt loca noua in superficie spatii S maneant. Manifesto itaque per transpositionem elementi $\mathrm{d}P$, superficies T patitur mutationem $\pm \mathrm{d}P . \delta e . \sin(5, 6)$, perspicicturque facile, generaliter loquendo signum positiuum vel negatiuum a signo quantitatis cos (4, 5) pendere. Sed concinnius haec variatio exprimitur introducendo directionem nouam, quae sit in plano superficiem spatii S tangente, lineae P normalis, et respectu spatii s extrorsum ducta. Denotando per (8) punctum huic directioni respondens, variatio superficiei T a transpositione elementi $\mathrm{d}P$ oriunda erit $\mathrm{d}P . \delta e . \cos(5, 8)$, siue (IV)

$$\delta T = \int \mathrm{d}P . \delta e . \cos(5, 8)$$

vbi signum factoris cos(5, 8) sponte decidet, vtrum mutatio sit incrementum an decrementum.

Quum punctum (6) sit polus circuli maximi per puncta (7), (8) ducti, punctumque (5) iaceat in circulo maximo per puncta (6), (8) ducto, puncta (5), (7), (8) formabunt triangulum in (8) rectangulum, eritque adeo $\cos(5, 7) = \cos(5, 8) \, . \cos(7, 8)$: arcus (7, 8) autem est mensura anguli inter duo plana superficies spatiorum s, S in eorum intersectione P tangentia, et quidem inter eas horum planorum plagas, quae spatium vacuum includunt. Hunc angulum per i denotabimus, vnde $180° - i$ erit angulus inter planorum plagas eas, quae spatium s continent, formulaque nostra (V), $\cos(5, 7) = \cos(5, 8) \, . \cos i$.

28.

E combinatione formularum I....IV prodit variatio expressionis W,

$$\delta W = \int \mathrm{d}U \, . \, \delta e \, . \cos(4, 5) \, . \left[z + \alpha\alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]$$
$$- \int \mathrm{d}P \, . \, \delta e \, . \cos(5, 8) \, . (\alpha\alpha \cos i - \alpha\alpha + 2\mathfrak{G}\mathfrak{G})$$

vbi integrale prius extendi debet per omnia elementa $\mathrm{d}U$ partis liberae superficiei spatii s, vel partium liberarum (si forte plures separatae adsint), integrale posterius autem per omnia elementa $\mathrm{d}P$ lineae vel linearum, quae illam partem liberam, vel illas partes liberas a reliquis spatio S contiguis separant.

Jam quum in statu aequilibrii valor ipsius W debeat esse minimum, adeoque admittere nequeat mutationem negatiuam pro vlla mutatione infinite parua figurae fluidi, pro qua volumen s inuariatum manet, i. e. pro qua $\delta s = \int \mathrm{d}U \, . \, \delta e \, . \cos(4, 5)$ euanescit, facile perspicietur, figuram superficiei U in statu aequilibrii talem esse debere, vt in omnibus eius punctis elementum variationis δW hoc

$$\mathrm{d}U \, . \, \delta e \, . \cos(4, 5) \, . \left[z + \alpha\alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]$$

proportionale sit elemento variationis $\mathrm{d}s$, puta quantitati $\mathrm{d}\,U.\delta e.\cos(4, 5)$, siue quod idem est, vt fiat

$$z + \alpha\alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \text{Const.}$$

Manifesto enim, si haec proportionalitas locum non haberet, valor ipsius W decrementi capax foret per idoneam mutationem figurae superficiei U, limite P adeo inuariato manente. Ceterum aequatio illa pro *tota* superficie U valet, etiamsi haec e pluribus partibus separatis constet, dummodo fluidum ipsum cohaereat.

Aequatio ista constituit theorema fundamentale primum in theoria aequilibrii fluidorum, quod iam ab ill. Laplace erutum est, sed per methodum a nostra plane diuersam.

Si planum, pro quo z quantitati aequationis constanti aequalis est, et quod planum horizontale normale (plan de niveau) vocare possumus, loco eius, a quo coordinatae z numeratae erant, adoptamus, erit

$$z = -\alpha\alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

vnde protinus demanant corollaria sequentia.

I. Si planum normale superficiem liberam U vllibi secat, in quouis sectionis puncto superficies necessario concauo-conuexa erit, atque radius maximus conuexitatis radio maximo concauitatis aequalis.

II. Supra planum normale superficies vel concauo-concaua erit, vel, sicubi fuerit concauo-conuexa, curuatura concaua conuexam superabit.

III. Infra planum normale superficies vel erit conuexo-conuexa, vel sicubi fuerit concauo-conuexa, curuatura conuexa concauam superabit.

IV. Superficies libera U nequit habere partem finitam planam nisi horizontalem et cum plano normali coincidentem.

29.

Aequatione quam modo stabiliuimus subsistente, variatio valoris ipsius W reducitur ad

$$\delta W' = -\int \mathrm{d}P \,.\, \delta e \,.\cos(5,8)\,(\alpha\alpha \cos i - \alpha\alpha + 2\beta\beta)$$

vnde introducendo angulum A talem vt sit

$$\cos A = \frac{\alpha\alpha - 2\beta\beta}{\alpha\alpha} \text{ siue } \sin \tfrac{1}{2} A = \frac{\beta}{\alpha}$$

habemus

$$\delta W' = \alpha\alpha \int \mathrm{d}P \,.\, \delta e \,.\cos(5,8) \,.\, (\cos A - \cos i)$$

integratione per totam lineam P extensa. Memores esse debemus, factorem $\cos(5,8)$ aequalem esse ipsi $\sin(5,6)$, signo positiuo vel negatiuo affecto, prout fluidum in motu suo virtuali apud elementum $\mathrm{d}P$ vel vltra limitem P redundare, vel citra recedere concipitur. Hinc facile concludimus, in statu aequilibrii, generaliter loquendo, vbique esse debere $i = A$. Si enim in aliqua parte lineae P esset $i < A$, motus virtualis primi generis in hac parte, manente parte reliqua limitis P inuariata, manifesto ipsi W' variationem negatiuam induceret, et perinde negatiua variatio ipsius W' prodiret per motum virtualem fluidi secundi generis, si in vlla parte lineae P esset $i > A$: vtraque igitur suppositio conditioni minimi in aequilibrio aduersatur.

Hoc est theorema fundamentale secundum, quod etiam inuestigationibus ill. Laplace intertextum, sed e principio virium molecularium haud demonstratum videmus.

30.

Theorema art. praec. modificatione quadam eget in casu singulari, quem silentio praeterire non licet. Tacite scilicet supposuimus, superficiem vasis iuxta totum limitem P curuatura continua gaudere, ita vt in quouis huius limitis puncto *vnicum* planum superficiem vasis tangens exstet. Si continuitas curuaturae in aliquo puncto singulari lineae P interrumpitur, siue cuspis ibi adsit, siue acies lineam P traiiciens, facile perspicietur, conclusionem nostram hinc non immutari; sed aliter res se habet, si continuitas curuaturae interrupta est in parte finita lineae P, i. e. si superficies vasis per partem finitam lineae P (vel adeo per totam hanc lineam) aciem offert. Tunc scilicet in quouis talis partis puncto

bina plana superficiem vasis tangentia aderunt, quorum alterum refertur ad partem liberam superficiei vasis, alterum ad partem T. Retinendo itaque characterem i pro angulo inter planum prius atque planum tangens superficiem U, denotandoque per k angulum inter hoc planum et planum posterius, haud amplius erit $i + k = 180°$, sed maior minorue, prout acies est conuexa vel concaua. Et dum elementum variationis δW, pro motu virtuali fluidi vltra limitem P redundantis, etiamnum exprimitur per

$$\alpha\alpha \, dP \, . \, \delta e \, . \sin(5, 6) \, . (\cos A - \cos i)$$

elementum illius variationis pro motu virtuali fluidi citra limitem P recedentis iam erit

$$- \alpha\alpha \, dP \, . \, \delta e \, . \sin(5, 6) \, . (\cos A + \cos k)$$

Ne igitur valor ipsius W capax sit variationis negatiuae, requiritur, vt neque valor ipsius $\cos A - \cos i$ sit negatiuus, neque valor ipsius $\cos A + \cos k$ positiuus, i. e. esse debet

$$\text{vel } i = A, \text{ vel } i > A$$

$$\text{atque vel } k = 180° - A, \text{ vel } k > 180° - A$$

In statu aequilibrii itaque esse nequit $i + k < 180°$, siue, quod idem est, *in statu aequilibrii limes superficiei fluidi liberae U esse nequit, per extensionem finitam, in acie concaua superficiei vasis.* Contra, quoties pars illius limitis coincidit cum acie conuexa, ad aequilibrium requiritur et sufficit, vt angulus inter plana fluidum et vas tangentia sit inter limites A et $A + a$ (incl.), extra fluidum, siue inter $180° - A$ et $180° - A + a$, intra fluidum mensuratus, si angulum inter duo plana superficiem vasis vtrimque ab acie tangentia in quouis puncto indefinite per $180° - a$ denotamus, quatenus hic angulus a plaga vasis mensuratur.

31.

Constantes $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, quarum ratio angulum A determinat, a functionibus f, F pendent, et quodammodo tamquam mensurae intensitatis virium molecularium, quas particulae fluidi et vasis exercent, considerari possunt. Si functiones istae ita comparatae sunt, vt fx, Fx sint in ra-

tione determinata a distantia x independente, puta vt n ad N, manifesto statuere possumus $\alpha\alpha : \beta\beta = cn : CN$, i. e. constantes $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ erunt proportionales attractionibus, quas in eadem distantia exercent duae moleculae quoad volumen aequales, altera fluidi altera vasis. Jam quum angulus A fiat acutus, recto aequalis, obtusus, duobus rectis aequalis, prout $\beta\beta < \frac{1}{2}\alpha\alpha$, $\beta\beta = \frac{1}{2}\alpha\alpha$, $\beta\beta > \frac{1}{2}\alpha\alpha$ sed $< \alpha\alpha$, $\beta\beta = \alpha\alpha$: in sensu istius suppositionis (quae si gratuita est, tamen verisimilitudini non repugnat) dicere oportet, casum primum locum habere, quoties attractio partium fluidi mutua maior sit quam duplum attractionis partium vasis in fluidum; secundum, quoties prior attractio sit duplum posterioris; tertium, quoties prior maior quidem sit posteriori, sed minor eius duplo; denique quartum, quoties ambae attractiones sint aequales. Exemplum casus primi exhibet argentum viuum in vasibus vitreis.

32.

At quantus est valor anguli A in casu eo, vbi attractio vasis maior est quam attractio partium fluidi mutua? Valor imaginarius, quem pro $\beta\beta > \alpha\alpha$ formula $\sin\frac{1}{2}A = \frac{\beta}{\alpha}$ angulo A assignat, iam testatur, suppositionem aliquam in tali casu non admissibilem subesse. Reuera quoties $\beta\beta > \alpha\alpha$, suppositio *limitationis* superficiei T cum conditione minimi respectu functionis W consistere nequit. Vbicunque enim limitem posueris, patet, si vltra hunc limitem cutem fluidi tenuissimam expansam concipias, ita vt T capiat augmentum T', et proin U augmentum huic proxime aequale, valorem functionis W assumere mutationem sensibiliter aequalem quantitati negatiuae $-(2\beta\beta - 2\alpha\alpha)\,T'$; quinadeo valorem ipsius W tamdiu vlterioris diminutionis capacem manere, donec T' totam superficiem vasis reliquam occupauerit. Valor mutationis $-(2\beta\beta - 2\alpha\alpha)\,T'$ eo magis exactus erit, quo minor crassities accipiatur, et quatenus tantummodo de valore expressionis W agitur, nihil impedit, quominus crassities vsque ad euanescendum diminui concipiatur. Attamen cutis crassitiei euanescentis (probe distinguendae ab insensibili) nihil esset nisi fictio ma-

thematica, figuraque spatii s tali fictioni accommodata reuera non differret ab ea, pro qua W in casu $\mathfrak{6}\mathfrak{6} = \alpha\alpha$ valorem minimum acquirit.

Sed paullo aliter res se habet in problemate nostro physico, vbi talis cutis accessoria necessario gaudere debet certa crassitie, vtut insensibili, quo aequilibrium consistere possit. Quoties talis pars adest, expressio W, vti in art. 18 docuimus, incompleta est, et denotata ea parte vasis, quam cutis tegit, per T'', huiusque crassitie in quouis puncto indefinite per ϱ, expressioni Ω adhuc adiiciendi erunt termini

$$\pi c c \int \theta'\varrho \,.\, \mathrm{d}\, T'' - \pi c C \int \Theta'\varrho \,.\, \mathrm{d}\, T''$$

adeoque valori ipsius W hi

$$\frac{\pi C}{g} \int \Theta'\varrho \,.\, \mathrm{d}\, T'' - \frac{\pi c}{g} \int \theta'\varrho \,.\, \mathrm{d}\, T''$$

$$= \int \mathrm{d}\, T'' . \left(\frac{2\mathfrak{6}\mathfrak{6}}{\Theta 0} . \Theta'\varrho - \frac{2\alpha\alpha}{\theta 0} . \theta'\varrho\right)$$

Quocirca quum valor ipsius W, per accessionem istius cutis, iam acceperit mutationem $(2\mathfrak{6}\mathfrak{6} - 2\alpha\alpha)\, T''$, mutatio tota, ei valori ipsius W, qui omittendo cutem locum habet, adiicienda, erit

$$- 2\int \mathrm{d}\, T'' . \left[\mathfrak{6}\mathfrak{6}\left(1 - \frac{\Theta'\varrho}{\Theta 0}\right) - \alpha\alpha\left(1 - \frac{\theta'\varrho}{\theta 0}\right)\right]$$

Haec mutatio propter $\theta' 0 = \theta 0$, $\Theta' 0 = \Theta 0$, nulla esset pro crassitie euanescente; at quum $\theta'\varrho$, $\Theta'\varrho$, crescente crassitie ϱ, citissime decrescant, et iam pro valore insensibili ipsius ϱ insensibiles euadant, mutatio ista citissime versus valorem $-(2\mathfrak{6}\mathfrak{6} - 2\alpha\alpha)\, T''$ conuerget, atque pro statu aequilibrii fluidi, ne valor expressionis W correctae capax sit vlterioris diminutionis sensibilis, sensibiliter eidem aequalis esse debebit. Ceterum inuestigatio completa legis, quam crassities ϱ sequi debet, profundiores euolutiones requireret, quibus tamen hic non immoramur, quum absque cognitione functionum f, F, a quibus functiones θ', Θ' pendent, nec non propter rationes in art. 34 indicandas, nimis otiosae videri possent. Ad inuestigationem partis substantialis fluidi, i. e. eius, cuius dimensiones omnes sensibiles sunt, sufficit, pro casu nostro, vbi $\mathfrak{6}\mathfrak{6} > \alpha\alpha$, vas in vicinia limitis partis substantialis *madefactum* concipere, i. e. cute fluida

obductam, cuius crassities insensibilis quidem sit, attamen tanta, vt $\theta'\rho$, $\Theta'\rho$ negligi possint. Hoc pacto functio, quae in statu aequilibrii minimum esse debet, erit

$$\int z\,ds - 2(\mathcal{C}\mathcal{C} - \alpha\alpha)(T + T') - \alpha\alpha T + \alpha\alpha U$$

vbi T, U ad solam partem substantialem fluidi referri supponuntur. Patet itaque, variationem huius functionis e mutatione virtuali figurae partis substantialis fluidi oriundam (qualis mutatio aggregatum $T + T'$ non afficit) conuenire cum variatione expressionis

$$\int z\,ds - \alpha\alpha T + \alpha\alpha U$$

i. e. eiusdem expressionis, quae minimum esse debet pro casu $\mathcal{C}\mathcal{C} = \alpha\alpha$. Hinc colligimus, figuram aequilibrii fluidi in vase, pro quo $\mathcal{C}\mathcal{C} > \alpha\alpha$, conuenire cum figura aequilibrii eiusdem fluidi in vase, pro quo $\mathcal{C}\mathcal{C} = \alpha\alpha$, ea tamen differentia, vt illa in aequilibrio stricto desinere debeat in cutem crassitiei insensibilis. Ceterum ill. Laplace iam monuit, pro illo casu vas cute fluidi insensibilis crassitiei obductum aequipollere vasi tali, cuius particulae vim attractiuam in fluidum exerceant vi attractiuae partium fluidi mutuae aequalem.

Sponte hinc sequitur modificatio, propositionibus art. 18 circa ascensum fluidorum in tubis capillaribus verticalibus adiicienda: quoties scilicet $\mathcal{C}\mathcal{C} > \alpha\alpha$, in formulis illic allatis $\alpha\alpha$ loco ipsius $\mathcal{C}\mathcal{C}$ substituere oportet.

33.

In casu eo, vbi $\mathcal{C}\mathcal{C} < \alpha\alpha$, madefactio vasis per cutem fluidi insensibilis crassitiei locum habere nequit, siquidem lex functionum θ', Θ' ea est, vt valor functionis

$$\alpha\alpha\left(1 - \frac{\theta'\rho}{\theta'0}\right) - \mathcal{C}\mathcal{C}\left(1 - \frac{\Theta'\rho}{\Theta'0}\right)$$

pro qua breuitatis caussa scribemus $Q\rho$, continuo crescat, dum ρ a valore 0 versus valorem sensibilem progreditur: manifesto enim pro tali functionis $Q\rho$ indole existentia talis cutis conditioni minimi repugnaret. Sponte illam indolem affert hypothesis, de qua in art. 31 loquuti sumus, puta vbi fx, Fx sunt in ratione determinata ab x independente, quoniam hinc

etiam sequitur $\frac{\theta' \rho}{\theta' 0} = \frac{\Theta' \rho}{\Theta' 0}$, et proin $Q\rho = (\alpha\alpha - 6 6)\left(1 - \frac{\theta' \rho}{\theta' 0}\right)$. At si functiones f, F legem diuersam sequerentur, haud impossibile esset, vt valore ipsius $\frac{\theta' \rho}{\theta' 0}$ rapidius decrescente, quam valore ipsius $\frac{\Theta' \rho}{\Theta' 0}$, functio $Q\rho$, intra ambitum valorum insensibilium ipsius ρ, primo fieret negatiua, et postquam attigisset valorem suum minimum (i. e. extremum negatiuum) rursus ascenderet per valorem 0 versus limitem suum positiuum $\alpha\alpha - 66$. In tali casu aequilibrium vtique postularet cutem insensibilem, cuius crassities generaliter loquendo tanta esse deberet, vt $Q\rho$ haud sensibiliter discrepet a valore suo minimo. Qui si per $- 6' 6'$ denotatur, erit $6' 6' < 66$; figura autem partis substantialis fluidi perinde determinabitur, ac si esset in vase, cuius respectu loco quantitatis 66 substituere oportet $6' 6'$, i. e. angulus inter planum superficiem fluidi liberam in continiis partis substantialis tangens atque parietem vasis erit $= 2$ arc. sin $\frac{6'}{\alpha}$. Sed quum valde dubium sit, an talis casus in rerum natura exstet, superfluum videtur, diutius ei immorari.

34.

Alienum foret ab instituto nostro praesente, a principiis generalibus hic stabilitis ad phaenomena specialia descendere, praesertim quod illorum principiorum essentia quadrat cum theoria ea, per quam ill. Laplace aequali arte et successu permulta phaenomena in aequilibrio fluidorum conspicua iam explicauit. Vastus vtique superest campus, largam messem nouam pollicens: sed haec curis futuris reseruata maneat. Contra e re erit, quasdam annotationes adiicere, quae vel nouam lucem huic argumento affundere, vel interpretationem erroneam arcere poterunt.

I. Theoria nostra non arrogat sibi determinationem figurae aequilibrii mathematice exactam, sed acquiescit in determinatione figurae talis, a qua figura aequilibrii vera differre nequit quantitate sensibili. Errares, si hoc alicui imperfectioni theoriae tribueres, quae ex asse praestitit, quantum

praestare possibile est, quamdiu lex attractionis molecularis ignoratur. In statu aequilibrii functio Ω exacte maximum esse debet, adeoque functio

$$\frac{2\pi c s \psi 0}{g} - \frac{\Omega}{g c}$$

minimum; haec autem, pro indole attractionis molecularis, non quidem exacte aequalis est functioni W, attamen insensibiliter tantum ab ea differt. Figura igitur, pro qua W fit minimum, non est exacta figura aequilibrii, sed differentia esse debet insensibilis, quatenus quidem quaelibet mutatio sensibilis istius figurae valorem sensibiliter maiorem functionis W produceret. Manifesto hinc non excluditur differentia sensibilis in curuatura superficiei, dummodo limitetur ad partem superficiei insensibilem: quapropter in figura aequilibrii exacta angulum constantem supra per A denotatum haud amplius considerare licet tamquam inclinationem superficiei fluidi ad parietem vasis in ipso contactu, sed tantummodo in distantia immensurabili a vase, siue, vt ill. Laplace recte iam monuit, inclinatio in limite sphaerae sensibilis attractionis vasis cum valore ipsius A sensibiliter coincidet.

II. Probe distinguere oportet figuram aequilibrii a figura quietis. Quoties fluidum est in statu aequilibrii, certo in eo perseuerare debebit. At quoties figura fluidi aliquantum a figura aequilibrii differt, nihilominus accidere potest, vt fluidum vel in quiete permaneat, vel, si moueatur, motum iam amittat, antequam statum aequilibrii attigerit, perinde vt e. g. cubus plano horizontali tantum impositus in aequilibrio versatur, sed etiam supra planum inclinatum quiescere potest, frictione motum impediente. Ita fluidum talem statum occupans, pro quo W habet valorem minimum, certo quiescet: sed quoties est in statu ab illo diuerso, puta vbi W diminutionis capax est, ex hoc statu in statum aequilibrii eatenus tantum transibit, quatenus frictio non impediuerit. Hocce autem respectu duae conditiones aequilibrii essentialiter diuersae sunt. Scilicet aequatio fundamentalis prior (art. 28) independens est a mutabilitate limitis P, i. e. ad conditionem minimi tunc quoque necessaria, vbi hic limes inuariabilis supponitur: quapropter, quatenus quidem fluidum perfecta fluiditate gaudet,

vt pars vna supra alteram libere gliscere possit, dum vel minima vis motum postulat, fluidum necessario illi conditioni se accommodabit. Longe vero alia est ratio principii secundi (art. 29), quod essentialiter pendet a perfecta limitis P mobilitate in superficie vasis. Conditio minimi in valore ipsius W vtique postulat aequationem $i = A$: si vero, postquam superficies fluidi priori quidem principio se accommodauit, angulus i nondum assequutus est valorem normalem, neque adeo W valorem absolute minimum, transitus in statum aequilibrii perfecti fieri nequit absque translocatione limitis P, siue absque motu fluidi in contactu cum vase, quali motui vtique obstare potest frictio. Hinc manifestum est, cur in experimentis circa eadem corpora institutis tantas differentias in valore anguli i offendamus. Perinde in casu eo, vbi $\beta\beta > \alpha\alpha$, fluidum in vase, cuius parietes iam sunt madefacti, vtique se componet ad legem aequilibrii, secundum quam pro parte substantiali fluidi esse debet $i = 180°$: sed in vase, cuius parietes extra fluidum etiamnum sunt sicci, fluidum a statu non aequilibrato proficiscens parietesque vasis siccas inuadens iam ad quietem peruenire poterit, antequam angulus i valorem $180°$ attigit. Hinc simul elucet ratio, cur phaenomena capillaria fluidorum talium, quae madefactioni non aduersantur, in tubis siccis tantas irregularitates offerant, ascensumque saepissime longe minorem, quam in tubis iam humectatis, vbi consensum pulcherrimum cum theoria semper aspicimus.

III. Ratio constantium α, β e phaenomenis deriuari nequit, quoties β est maior quam α: figura enim eiusdem fluidi in vasibus forma aequalibus materia diuersis pro isto casu non differt nisi respectu cutis immensurabilis vas madefacientis. Quoties autem β minor est quam α, determinatio rationis inter has constantes possibilis quidem est adiumento anguli i, sed propter rationes modo allatas magnam praecisionem vix feret. Pro mercurio in vasibus vitreis ill. Laplace statuit angulum $i = 43° \, 12'$.

Longe maioris praecisionis capax est determinatio constantis α, praesertim si vasibus madefactionem admittentibus vti licet. Pro aqua sub tem-

peratura 8, 5 graduum thermometri centesimalis statuere oportet secundum experimenta ab ill. Laplace citata *)

$$\alpha\alpha = 7{,}5675 \text{ millim. quadr., siue}$$
$$\alpha = 2{,}7509 \text{ millim.}$$

Pro spiritu vini, cuius pondus specificum $= 0{,}81961$, sub eadem temperatura

$$\alpha\alpha = 3{,}0441 \text{ millim. quadr., siue}$$
$$\alpha = 1{,}7447 \text{ millim.}$$

Pro oleo terebinthino sub temperatura 8 graduum

$$\alpha\alpha = 3{,}305 \text{ millim. quadr., siue}$$
$$\alpha = 1{,}818 \text{ millim.}$$

Pro mercurio, sub temperatura 10 graduum, statuere licet, donec experimenta noua maiorem praecisionem suppeditauerint,

$$\alpha\alpha = 3{,}25 \text{ millim. quadr., siue}$$
$$\alpha = 1{,}803 \text{ millim.}$$

Ceterum verisimile est, temperaturam eatenus tantum valorem constantis $\alpha\alpha$ afficere, quatenus densitas inde pendet, cui itaque in hac hypothesi valor ipsius $\alpha\alpha$ proportionalis erit.

Valores isti conclusi sunt ex ascensione vel depressione fluidorum in tubis capillaribus: attamen valde difficile est, horum diametros exacte mensurare, difficilius, de forma circulari sectionis transuersalis certitudinem acquirere. Longe maiorem praecisionem pollicentur experimenta circa diametros et volumina magnarum guttarum mercurii tabulae horizontali vel curuaturae perparuae notae insidentium, qualia iam instituerunt physici Segner et Gay-Lussac: nec non, pro liquidis vasa vitrea madefacientibus, experimenta circa dimensiones bullarum magnarum aeris in vasibus superne operculo madefacto plano horizontali vel parum et

*) Obseruare conuenit, quantitatem ab ill. Laplace per H denotatam conuenire cum nostro $\pi c \theta 0$, adeoque α apud illum auctorem idem denotare, quod in signis nostris est $\frac{g}{\pi c \theta 0}$ siue $\frac{1}{2\alpha\alpha}$.

secundum radium notum curuato clausis, ad quae instituenda physicos inuitamus.

IV. Ne limites huic commentationi praescriptos excederemus, applicationem principiorum nostrorum generalium hocce quidem loco ad casum simplicissimum restringere oportuit, vbi liquidum vnicum in vase firmo consideratur. Nihil vero obstat, quominus theoriae summa generalitas concilietur, ita vt etiam problema plurium liquidorum in eodem vase, nec non casum eum amplectatur, vbi insuper corpora rigida, vel omnino vel ex parte libera, fluido immersa sunt. Sed harum quaestionum vberiorem expositionem ad aliam occasionem nobis reseruare debemus.